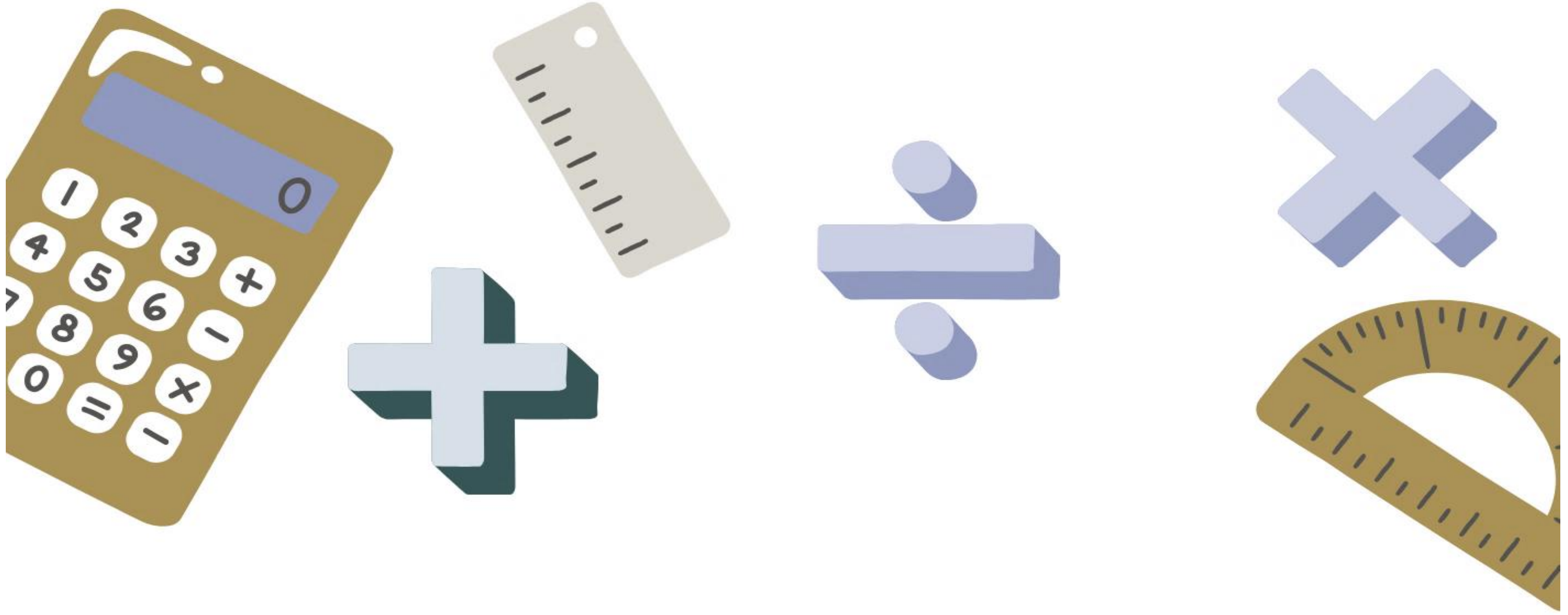
Temas Selectos

de matemáticas II

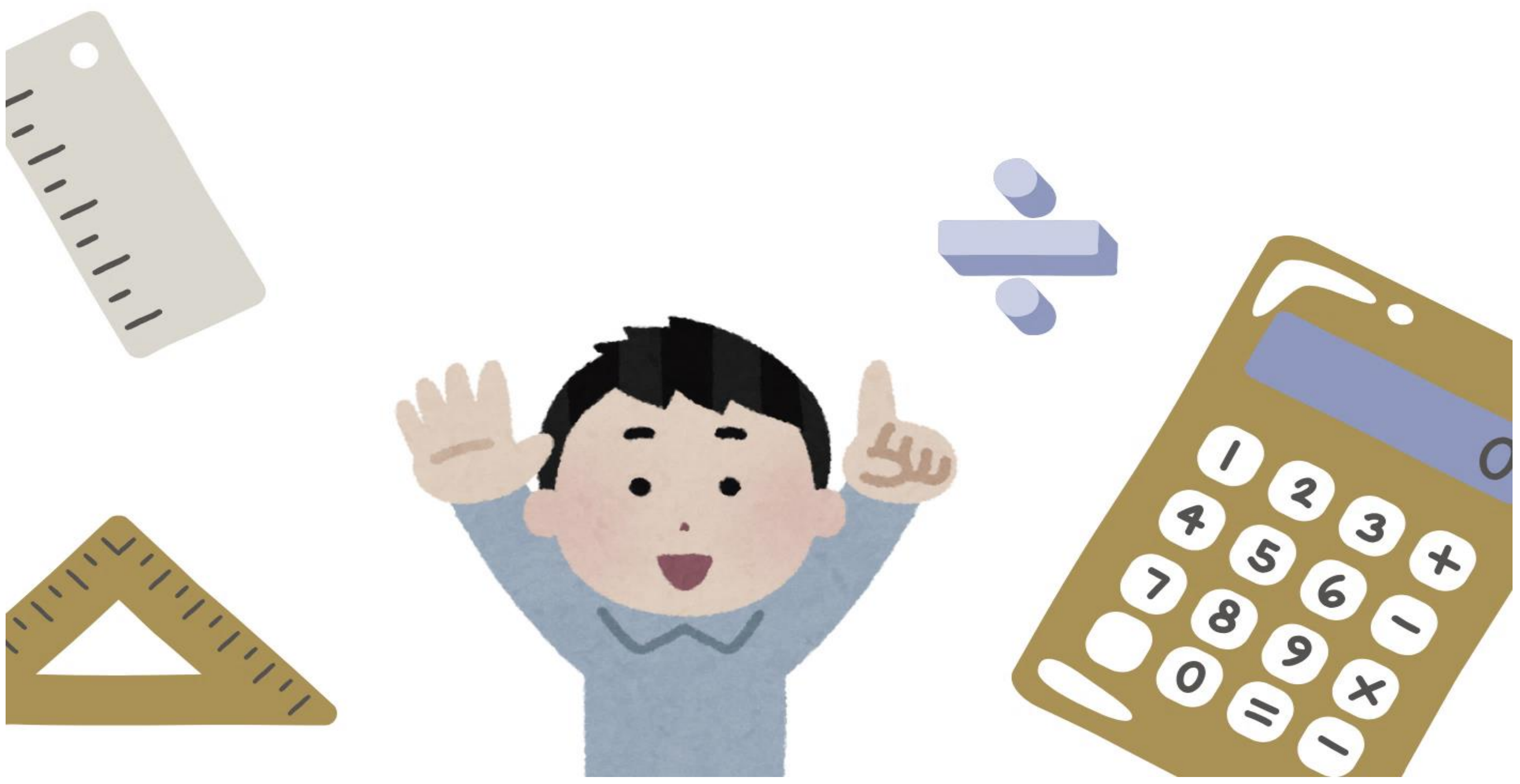
CECyTE Baja California

Propuesta NEM



LAS MATEMÁTICAS NOS ENSEÑAN QUE TODOS LOS PROBLEMAS, TIENEN

SOLUCIÓN.



Dirección General

Av. Panamá #199, esquina con Buenos Aires

Colonia Cuauhtémoc Sur

Teléfonos 01 (686) 905 56 00 al 08

Correo Electrónico: docencia@cecytebc.edu.mx

Página Web: www.cecytebc.edu.mx

Temas selectos de matemáticas II

Quinto semestre

Bachillerato Tecnológico

Primera Edición

- Ayala Rodríguez Emma
- Meuly Soto Claudia Sofía
- Portilla Tejeda Filiberto
- Venegas Neave José Luis

Revisión técnica:

- Brenda Alejandra Ceseña Sánchez

En la integración de este material participo:

- Torres Cota Alejandra

Diseño de Portada:

- Delgado Vásquez Dennis Patricia

IMPRESO EN MÉXICO

Primera Edición, 2025

Presentación

La guía de **Temas Selectos de matemáticas II** ha sido elaborada bajo los principios de la **Nueva Escuela Mexicana**, enfocada en fortalecer el pensamiento lógico-matemático y su aplicación en situaciones reales con el fin de brindarles a los estudiantes las herramientas necesarias para el desarrollo de un pensamiento flexible y crítico que promueven el aprendizaje significativo.

En “Temas selectos de matemáticas II: Pensamiento geométrico avanzado” se abordan contenidos tradicionales de geometría analítica desde una óptica novedosa: puesto que el estudiantado contará con experiencias de aprendizaje distintas a las tradicionales. Se han considerado contenidos de trigonometría a lo largo de las progresiones de aprendizaje. Se busca robustecer y profundizar acerca de lo que se trabajó en esta área de la matemática en los primeros tres semestres, colocando progresiones de aprendizaje que apuntalan el estudio de propiedades e identidades trigonométricas en el contexto de resolución de problemas propios de la geometría analítica, por ejemplo, al considerar el movimiento circular, el estudio de rotaciones de cónicas o el uso de coordenadas polares.

El material que tienes en tus manos es un claro ejemplo del esfuerzo, dedicación y entusiasmo del personal docente que participó en la elaboración del contenido.

¡Aprovéchalo y disfrútalo al máximo!

Datos de identificación

Nombre del alumno:

Correo:

Teléfono:

Grado/Grupo:

Plantel:

Docente:

Índice

Parcial 1

Parcial 2

PARCIAL 1

Evaluación Diagnóstica

Instrucciones: Lee cuidadosamente y contesta lo que se pide en cada uno de los siguientes reactivos, subrayando la opción correcta.

Nota: Realiza los procedimientos en tu cuaderno.

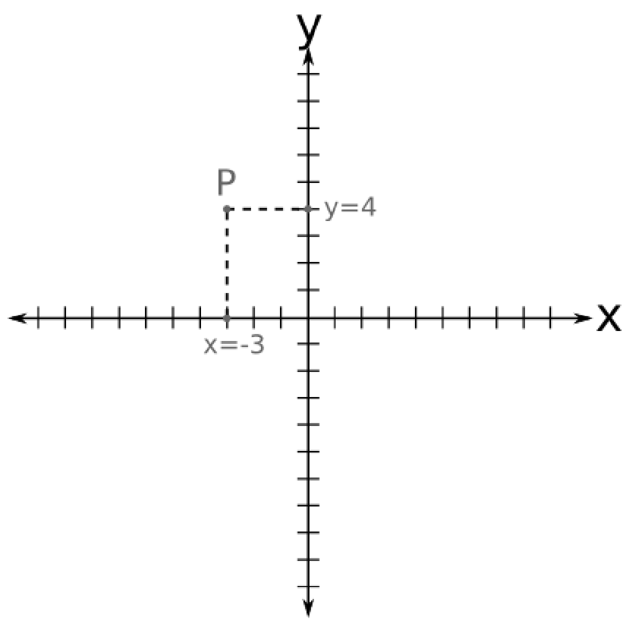
1.- Simplifica la siguiente fracción: $\frac{\mathbf{5-(-\,3)}}{\mathbf{6+(-8)}}$

a) -4 b) $\frac{-4}{7}$ c) – 1 d) $\frac{4}{7}$

2. Encuentra el punto medio del segmento formado por los siguientes pares ordenados: A (4, 6) y B (-3,-5).

a) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{4}\right)$ b) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{-3}{2},\frac{4}{3}\right)$ d) $\left(\frac{-1}{3},\frac{-4}{5}\right)$

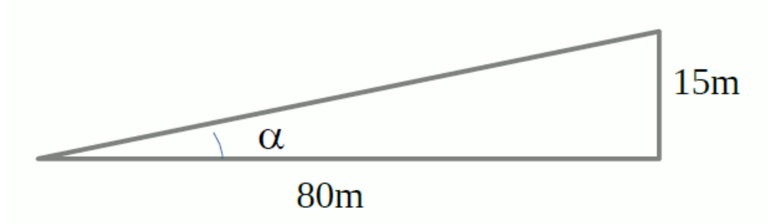
3. En la siguiente figura, indica en que cuadrante se encuentra el punto P.



a) Primer cuadrante b) Segundo cuadrante

c) Tercer cuadrante d) Cuarto cuadrante

4.- ¿Cuál es la función trigonométrica que se puede utilizar para encontrar el ángulo α en el siguiente triangulo?



a) seno α b) coseno α c) tan α d) $\sec \alpha$

Progresión 1

Intuye la trayectoria de objetos que se mueven en dos dimensiones y las describe heurísticamente a través del uso de sistemas coordenados cartesianos. De ser posible empleando software como Tracker y GeoGebra que le permita rastrear el movimiento de dichos objetos.

Meta de aprendizaje	Categoría
C2M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento.

Subcategoría	Contenido
S1. Capacidad para observar y conjeturar.	**1.-** Plano cartesiano. **2.-** Trayectorias lineales o curvas. **3.-** Representación gráfica de la trayectoria.

Enganchamos

Tipos De Satélites: Sus Órbita Y Funciones.

A lo largo de los años, diferentes tipos de satélites se han hecho indispensables para nosotros, apoyando desde el espacio diversas actividades, desde la radiodifusión y la navegación hasta la teledetección del planeta. Dado que el espectro de utilidad es muy grande, es común clasificar los tipos de satélites en base a su función.

Cada variante tiene sus propias características únicas y órbita alrededor del planeta en un tipo de órbita concreta, que se diferencian entre sí por la altura a la que se encuentra el satélite y la forma en la que gira. Independientemente de su uso, todos estos tipos de satélites nos ayudan a conocer mejor el planeta, a conectar con otras personas situadas en lugares lejanos y a mitigar los desastres, tanto naturales como provocados por el hombre.

Para más información.

¡Es interesante!

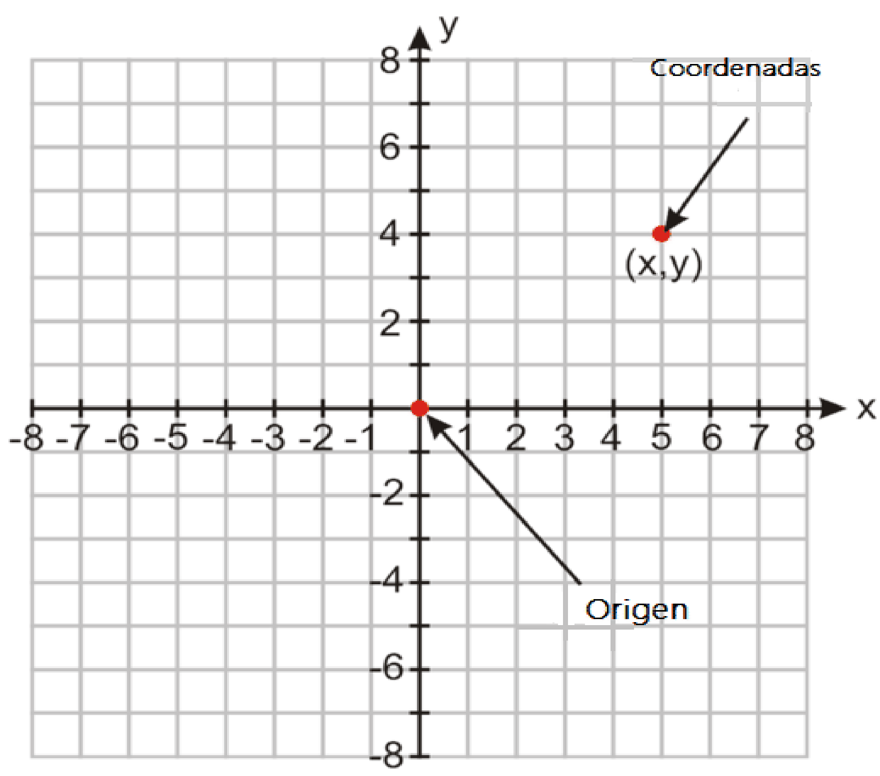
El sistema cartesiano fue inventado ante la necesidad de contar con algún sistema de referencia para representar elementos matemáticos como vectores, puntos, figuras geométricas, entre otros, ya que, estos debían ser representados con una gran precisión para poder estudiar funciones, magnitudes y demás.

Exploramos

Plano cartesiano.

¿Qué es el plano cartesiano?

Es una representación gráfica de dos rectas numéricas que se intersecan de forma perpendicular, por lo que forman cuatro cuadrantes. El plano cartesiano fue propuesto por René Descartes en el siglo XVII y desde entonces ha sido una herramienta empleada en múltiples áreas del conocimiento. Su uso radica principalmente en la ubicación de puntos en el plano y en el análisis de figuras geométricas.



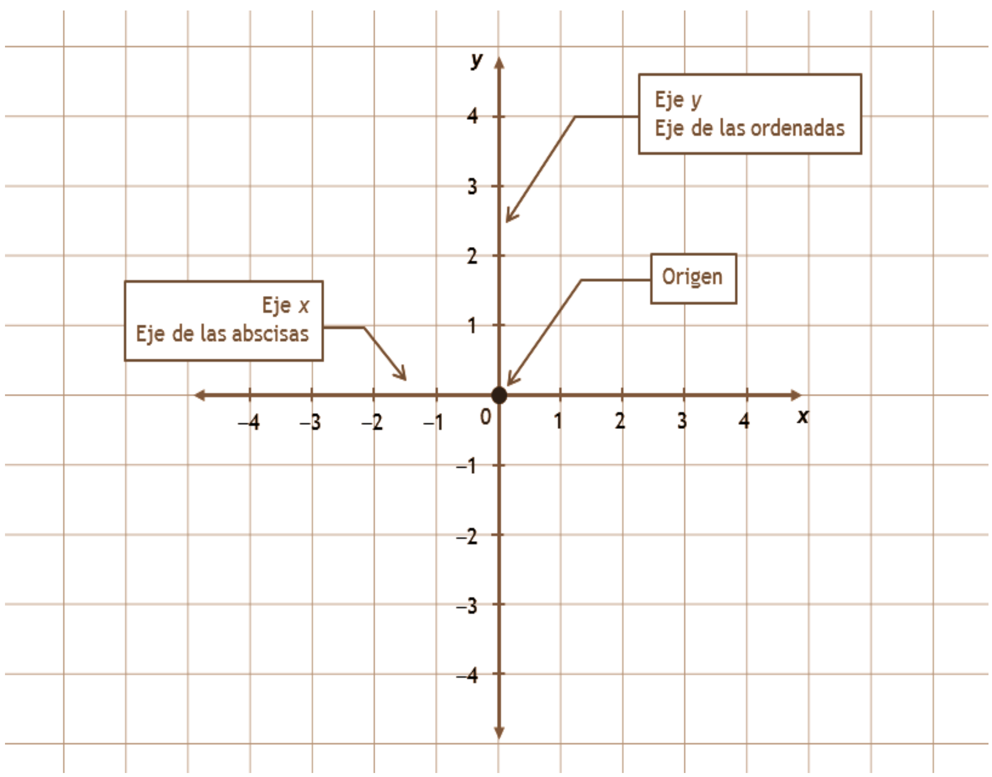
En cada cuadrante del plano cartesiano podemos ubicar infinitos puntos, los cuales se definen mediante un par ordenado expresado de esta manera: (coordenada en x, coordenada en y).

Explicamos

Elementos del plano cartesiano.

El plano cartesiano está formado por un eje horizontal denominado eje de las abscisas, que tradicionalmente denotamos con la letra “x”; y un eje vertical llamado eje de las ordenadas, que por lo general representamos con la letra “y”. Cada eje se comporta como una recta numérica que se prolonga hasta el infinito.

Ambos ejes se intersectan a 90 grados en el origen (0, 0). Hacia la derecha del eje x están las coordenadas positivas y a la izquierda, las negativas. En el eje “y “se tienen las coordenadas positivas hacia arriba y las negativas hacia abajo.



Ubicación de puntos en el plano.

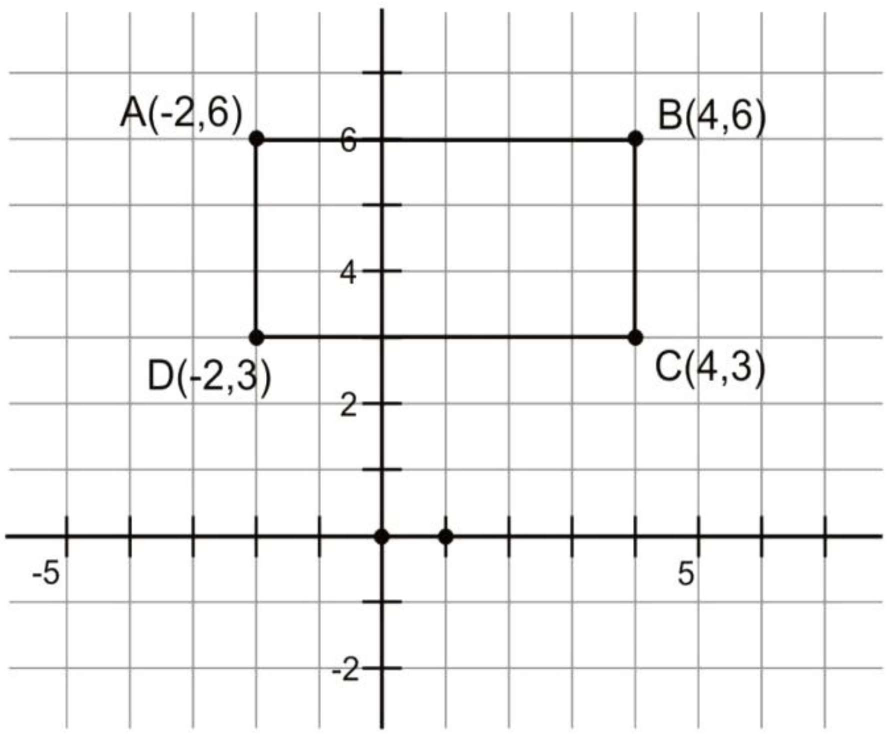
Los puntos a ubicar en el plano cartesiano deben venir expresados en pares ordenados, es decir, un valor que indique las coordenadas en “x” e “y” que tendrá dicho punto. Convencionalmente, el primer valor corresponde al eje x y el segundo al eje y.

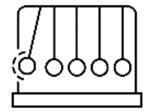
Por ejemplo, el par ordenado (−6, 5) significa que el punto se encuentra a 6 unidades a la izquierda del origen (0) y 5 unidades por encima del origen.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ubiquemos los puntos

- A (-2, 6)
- B (4, 6)
- C (4, 3)
- D (-2, 3)





¿Sabías que?

La cinemática es el área de la física que se dedica al estudio de los movimientos de los cuerpos sin preocuparse por las causas que los provocan. Uno de los conceptos centrales de esta área es la 'trayectoria', que se refiere al camino descrito por un cuerpo en movimiento a lo largo del tiempo.

Este concepto es crucial para comprender cómo los objetos se mueven en el espacio, sean coches en una carretera, pelotas de fútbol en un campo o planetas orbitando el Sol.

Para más información.

Trayectorias lineales o curvas.

Definición de Trayectoria.

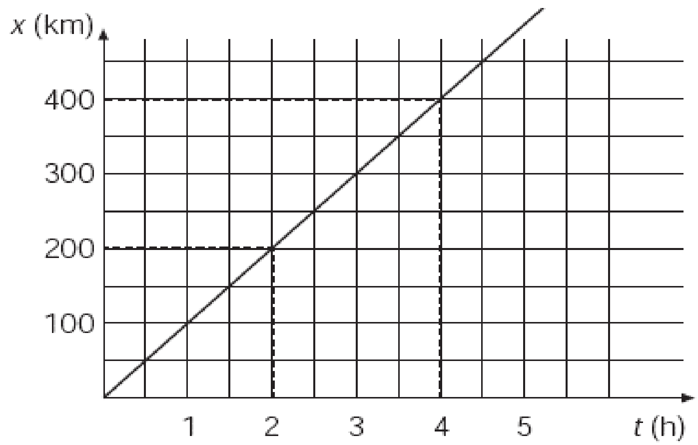
La trayectoria es el camino que un cuerpo recorre en el espacio a lo largo del tiempo. Este camino puede ser descrito por una línea continua que une las posiciones ocupadas por el cuerpo en diferentes instantes.

La trayectoria puede asumir diversas formas, dependiendo del tipo de movimiento del cuerpo. Cuando el movimiento es en línea recta, la trayectoria es rectilínea. Cuando el movimiento involucra curvas, la trayectoria es curvilínea. La forma de la trayectoria es crucial para entender cómo los cuerpos se desplazan y predecir su posición futura.

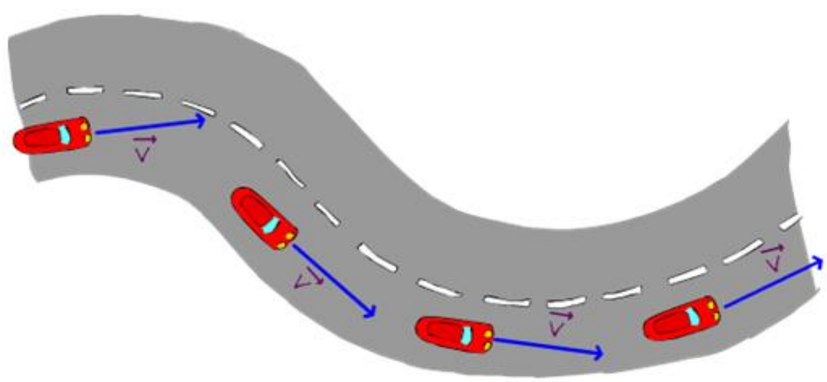
Tipos y Representación Gráfica de la Trayectoria.

Existen diferentes tipos de trayectorias, cada una caracterizada por la forma del camino recorrido por el cuerpo en movimiento.

La trayectoria rectilínea ocurre cuando el movimiento es en línea recta, como un coche moviéndose en una carretera recta con velocidad constante. En este caso, la posición del cuerpo a lo largo del tiempo puede ser descrita por una función lineal.

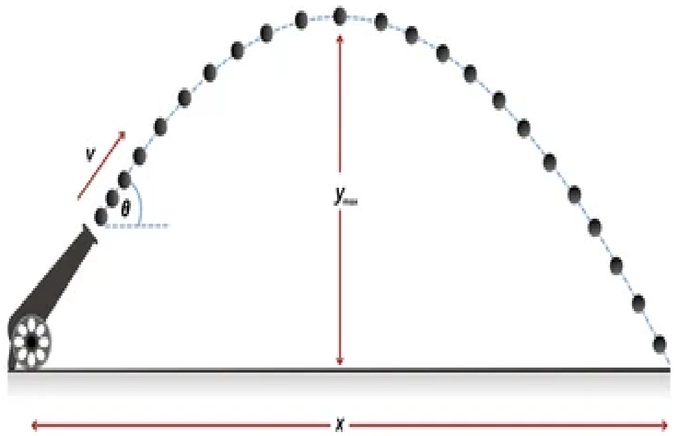


La trayectoria curvilínea ocurre cuando el movimiento involucra curvas. Un ejemplo común es la trayectoria de un coche en una carretera sinuosa.

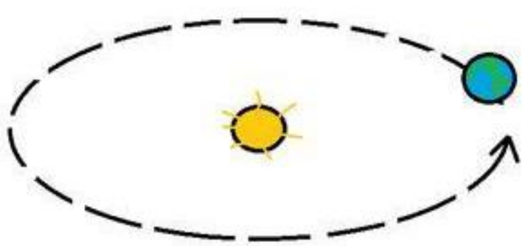


Para más información.

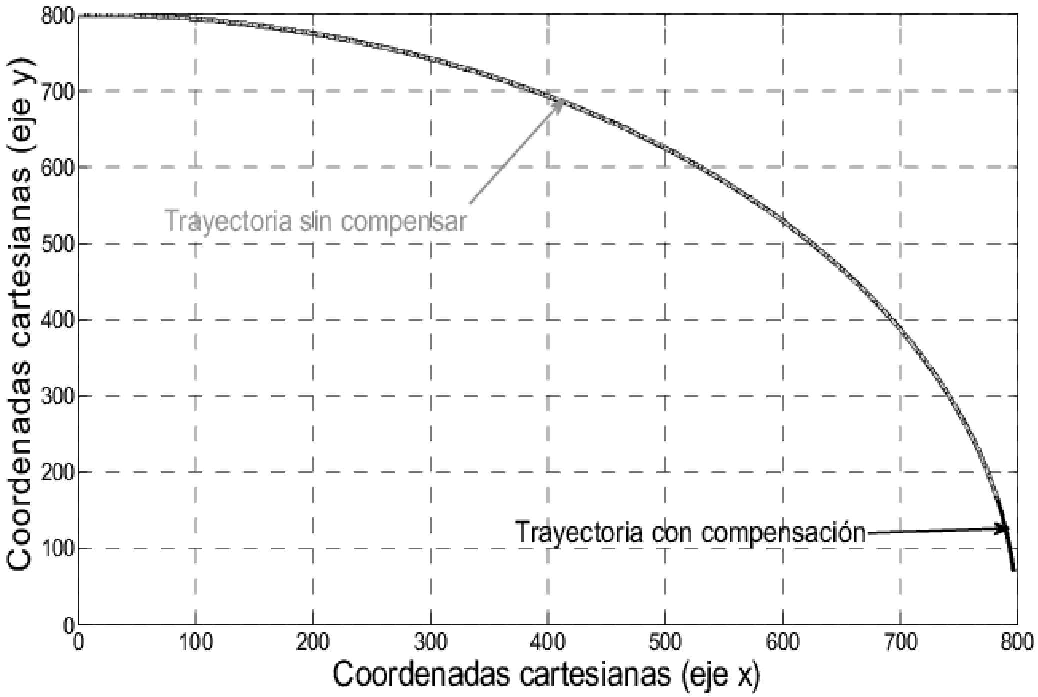
La trayectoria parabólica es un tipo especial de trayectoria curvilínea que ocurre, por ejemplo, cuando un proyectil es lanzado y sigue un camino en forma de parábola debido a la acción de la gravedad.



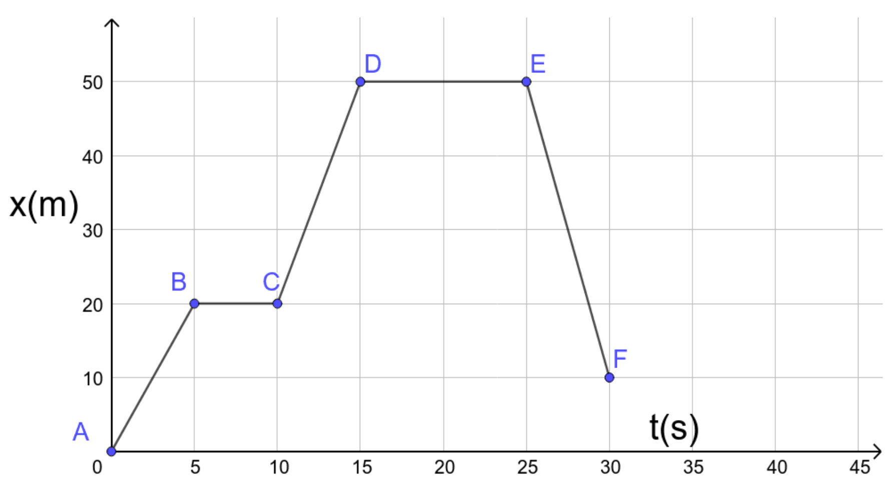
La trayectoria elíptica se observa en movimientos orbitales, como el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Según las leyes de Kepler, los planetas siguen trayectorias elípticas con el Sol en uno de los focos de la elipse. Cada tipo de trayectoria tiene sus propias características y es descrita por diferentes ecuaciones matemáticas.



En la cinemática, la trayectoria es frecuentemente representada gráficamente en un plano cartesiano, donde las coordenadas (x, y) indican las posiciones del cuerpo en diferentes instantes. Esta representación gráfica facilita la visualización y análisis del movimiento, permitiendo la aplicación de ecuaciones matemáticas para describir y prever el comportamiento del cuerpo en movimiento.



Gráficos de posición versus tiempo son útiles para analizar la velocidad y aceleración.

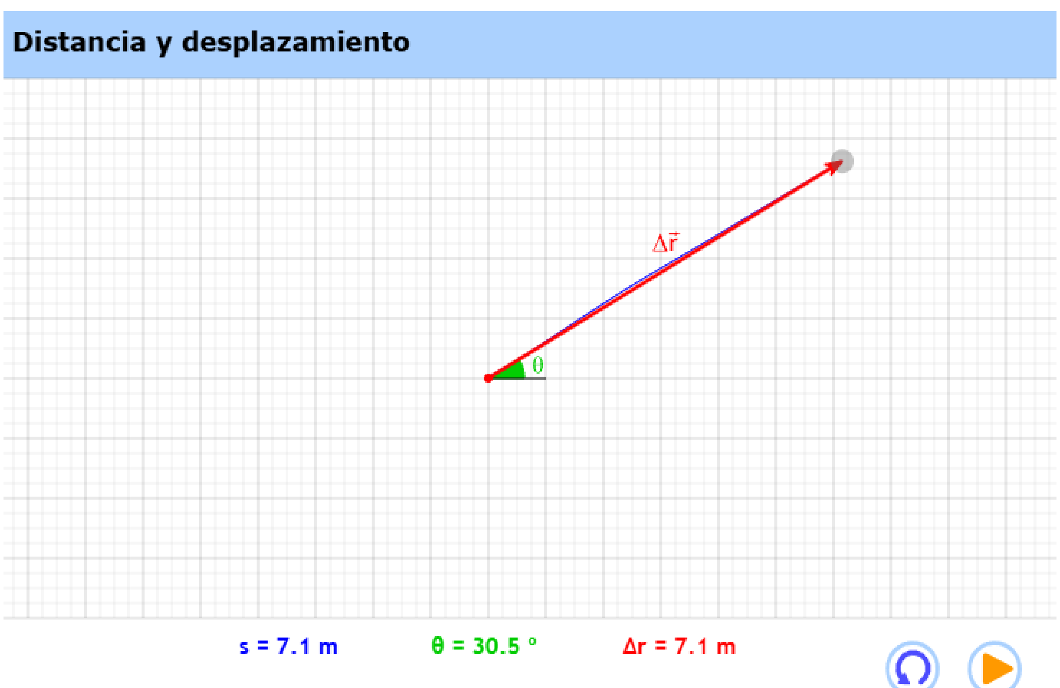


Elaboramos

A continuación, se pide que revises el siguiente enlace (QR) en donde se abordan algunos conceptos de posición, trayectoria y desplazamiento.

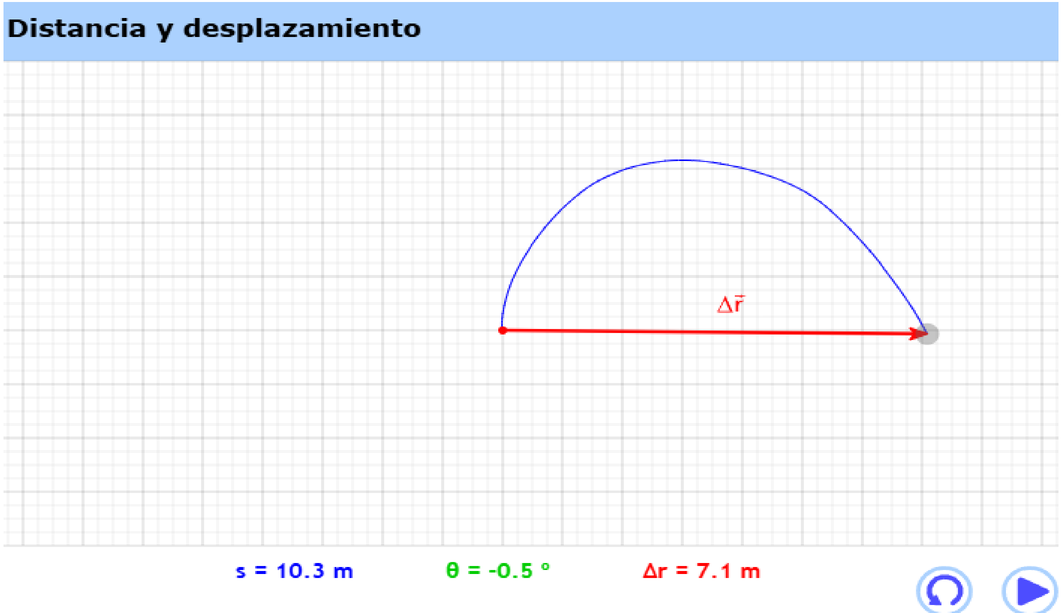
Ahora puedes probar si los conceptos los has comprendido realizando la simulación que se te propone en:

Ejemplo 1:



Obsérvese que la distancia "s" es igual al desplazamiento "Δr" cuando la trayectoria es una recta.

$S = \Delta r = 7.1$ m



Obsérvese que la distancia “s” es mayor al desplazamiento “ Δr” cuando la trayectoria es una parábola.
S = 10.3 m
Δr = 7.1 m

Evaluamos

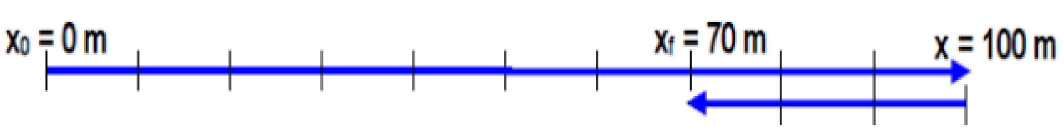
Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios realizando los procedimientos en tu cuaderno.

Nota: La distancia recorrida es igual a la suma de todos los recorridos $\Delta S = S_1 + S_2 + S_3$

El desplazamiento es igual a: $\Delta x = X_f - X_0$

1.- Un atleta recorre una pista de 100 m de largo hasta el final y 30 m más en sentido contrario.

El esquema de lo que ha hecho el atleta sería el siguiente:



- Calcula la distancia que ha recorrido y el desplazamiento.

Solución:

a) La distancia recorrida será:

b) El desplazamiento es:

2.- Imagina que lanzamos una pelota al aire y su movimiento es como el que ves en la figura.

Observa qué es la distancia recorrida, la trayectoria, la posición y el desplazamiento.

- Calcula el desplazamiento si la posición inicial es 10 m y la final 250 m

Solución:

a) El desplazamiento es:

3.- Un ciclista da 5 vueltas completas a un velódromo. La distancia recorrida en cada vuelta es 275 m. Halla el espacio recorrido y el desplazamiento total del ciclista.

a) El espacio total recorrido será:
b) El desplazamiento es igual a la diferencia entre la posición final y la inicial, es decir:
Si el ciclista da 5 vueltas "completas" la posición inicial y final será la misma $x_f = x_0$, por lo tanto, el desplazamiento será:

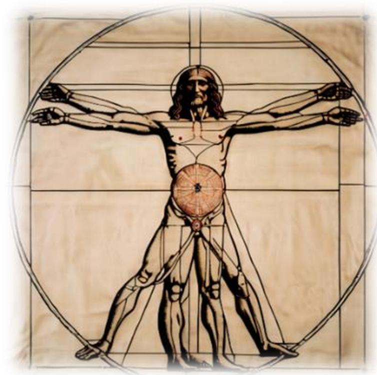
Progresión 2

Describe algebraicamente algunas trayectorias, lugares geométricos o regiones en el plano empleando ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas o relaciones de distancia y ángulo entre puntos y rectas del plano cartesiano.

Meta de aprendizaje	Categoría
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C3M2.** Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**C1.** Procedural. **C3.** Solución de problemas y modelación.
Subcategoría	**Contenido**
S2. Elementos geométricos. **S2.** Construcción de modelos.	**1.-** Lugares geométricos. **2.-** Ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas. **3.-** Relación de distancia y ángulo entre puntos y rectas.

Enganchamos

Cuadraturas V. La cuadratura del círculo II.



Son varios los grandes matemáticos que han conseguido, por uno u otro camino, la cuadratura del círculo. Hemos analizado, en este blog, algunas de las formas en que dicha cuadratura se ha logrado, fundamentalmente las relacionadas con lugares geométricos que de una u otra manera consiguen determinar un segmento relacionado con el número π.

Continúa leyendo el texto anterior, en el siguiente enlace.

Exploramos

Lugares geométricos.

La geometría analítica estudia dos problemas fundamentales:

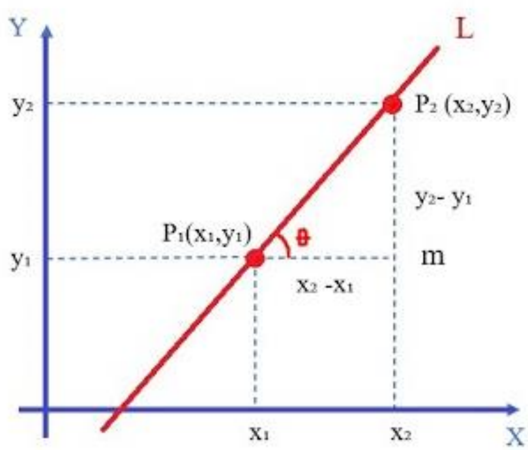
- A partir de una ecuación construir la gráfica correspondiente.
- A partir de una figura geométrica determinar su ecuación.

Además, el lugar geométrico es la curva formada por todos aquellos puntos, y solamente de aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas.

Ahora se analizará la primera de las formas geométricas: la línea recta.

Definición de línea recta.

Llamamos línea recta al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, el valor de la pendiente m tomado de la definición resulta siempre constante.



$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

El uso de estos modelos lineales en la vida es muy extenso. Es importante por esta razón, conocer las diversas definiciones de la línea recta, entre ellas se encuentran:

a) **Geométricamente:** Es una ecuación de primer grado con dos variables.
b) **Analíticamente:** Se define como la distancia más corta entre dos puntos.
c) **Gráficamente:** Es el lugar geométrico de la sucesión de puntos, tales que, tomados dos puntos diferentes cualesquiera P1 (X_1, Y_1) y P2 (X_2, Y_2) del lugar geométrico, el valor de la pendiente (m) es siempre constante.

Ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas.

Grafica de ecuaciones con dos incógnitas.

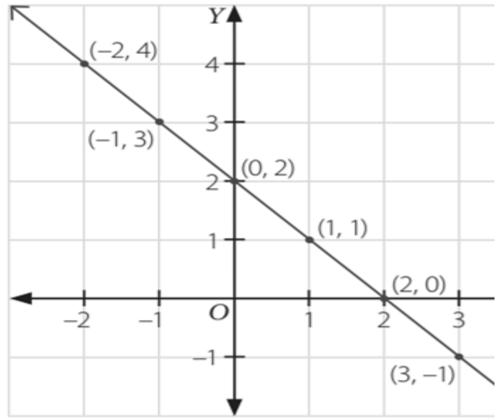
Representa en una tabla algunas soluciones que satisfacen la ecuación,

$$x + y = 2$$

luego ubica los pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano.

La ecuación $x + y = 2$, se puede escribir como $y = -x + 2$

x	$y = -x + 2$	(x, y)
-2	$-(-2) + 2 = 4$	$(-2,4)$
-1	$-(-1) + 2 = 3$	$(-1,3)$
0	$-(0) + 2 = 2$	$(0,2)$
1	$-(1) + 2 = 1$	$(1,1)$
2	$-(2) + 2 = 0$	$(2,0)$
3	$-(3) + 2 = -1$	$(3,-1)$



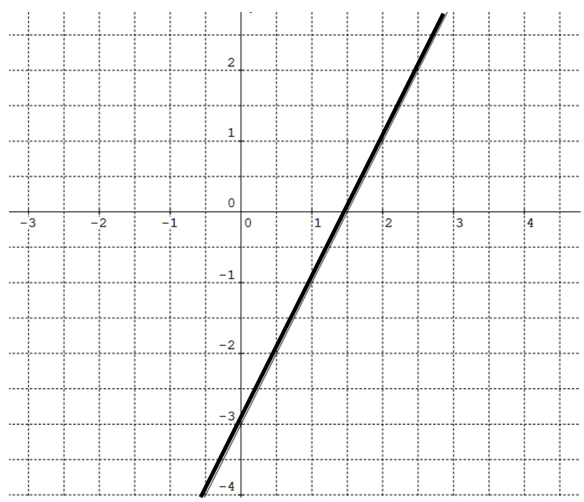
Gráficas de inecuaciones lineales con dos variables.

Representar gráficamente la siguiente inecuación.

$$2x - y - 3 > 0$$

1.- La ecuación $2x - y - 3 > 0$, se puede escribir como $y = 2x - 3$

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
-2	$2(-2) - 3 = -7$	$(-2,-7)$
-1	$2(-1) - 3 = -5$	$(-1,-5)$
0	$2(0) - 3 = -3$	$(0,-3)$
1	$2(1) - 3 = -1$	$(1,-1)$
2	$2(2) - 3 = 1$	$(2,1)$
3	$2(3) - 3 = 3$	$(3,3)$

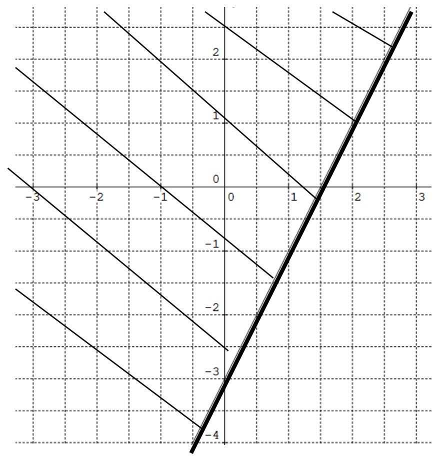


2.- Se elige un punto y se observa si se satisface la inecuación.

Se toma un punto por ejemplo el punto (0,0) y se sustituye en la inecuación.

$$2x - y - 3 > 0$$
$$2(0) - 0 - 3 > 0$$
$$0 - 0 - 3 > 0$$
$$-3 > 0$$

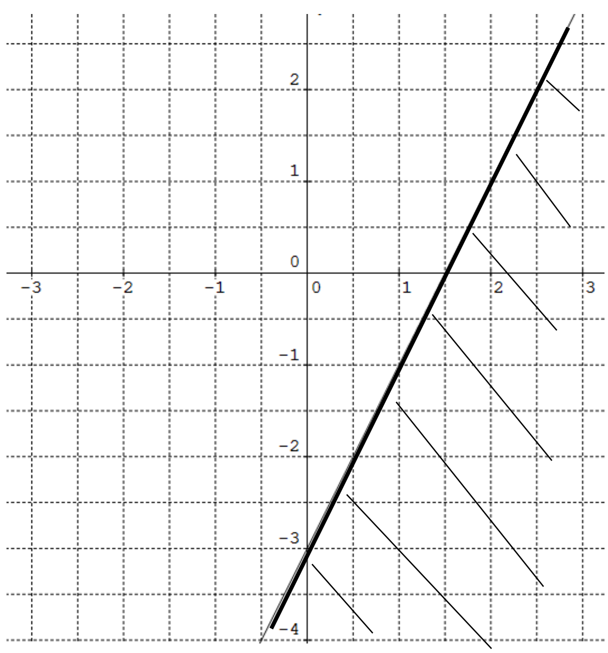
Como $-3\ no\ es\ mayor\ que\ 0$ No satisface la solución, la región solución es la contraria.



Se toma otro punto por ejemplo (4,2) y se sustituye en la inecuación.

$$2x - y - 3 > 0$$
$$2(4) - 2 - 3 > 0$$
$$8 - 2 - 3 > 0$$
$$3 > 0$$

Como $3\ es\ mayor\ que\ 0$ Satisface la solución, la región solución es la zona donde se encuentra el punto (4,2).



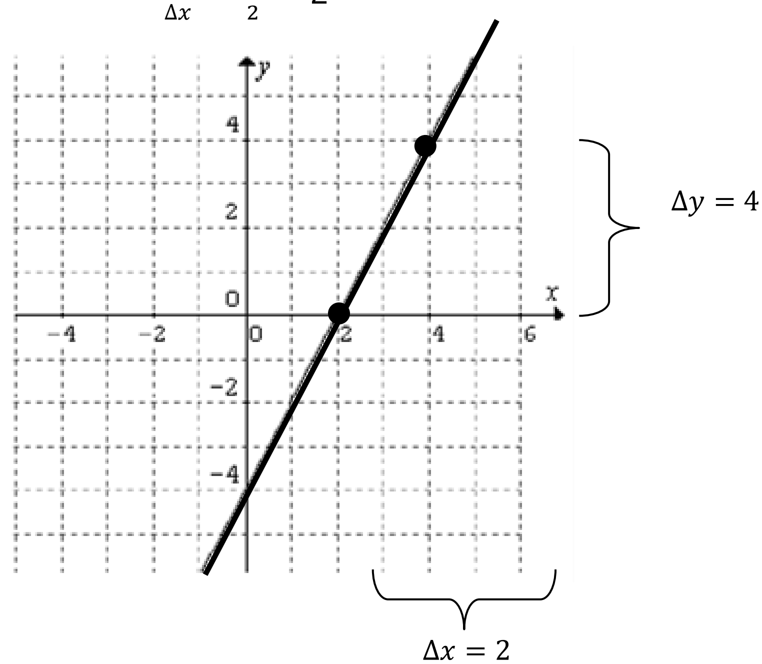
Nota: como la desigualdad es estricta (>,<), los puntos de la línea recta no están incluidos en la

Pendiente e inclinación de una recta.

La pendiente (m) de una recta “L” se define como la razón que existe en la variación de ordenadas (eje y) entre la variación de abscisas (eje x).

La siguiente figura muestra la gráfica de la ecuación lineal *y* = 2x -4, en ella se puede observar que el valor de “y” aumenta en cuatro unidades cada vez que el valor de “x” aumenta dos unidades, La razón de cambio de “*y*” entre el cambio correspondiente de “*x”* es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$$



A esta razón se le llama **pendiente de la recta** y se define como sigue:

Si dos puntos $P_1 (X_1, Y_1)$ y $P_2 (X_2, Y_2)$ están en una recta "L", la pendiente *m* de la recta, se define como: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$

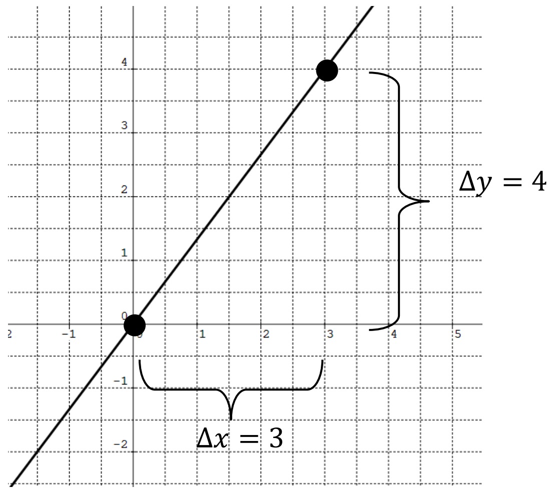
donde: $x_2 \neq x_1$

También se denomina pendiente de una recta a la tangente de un ángulo de inclinación.

$$m = \tan \emptyset$$

La pendiente de una recta no vertical es un número que mide que tan inclinada esta la recta y hacia donde esta inclinada.

$m = \frac{4}{3}$

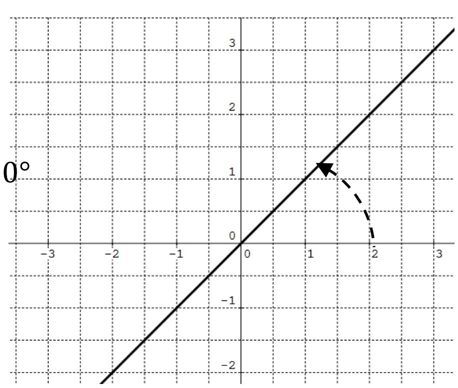


La recta de la figura por cada 3 unidades que avanza hacia la derecha, sube 4 unidades, decimos que la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3}$$

Si la pendiente de la recta es:
Positiva; la recta se eleva de izquierda a derecha y la $m > 0$ $0° < \emptyset < 90°$

$0° < \emptyset < 90°$

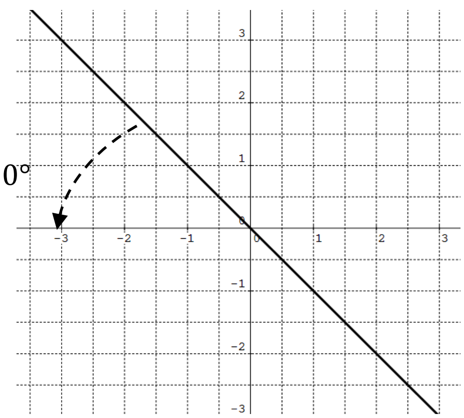


$m = +$

Nota: Se dice que la pendiente es creciente.

Si la pendiente de la recta es:
Negativa; la recta se eleva de izquierda a derecha y la $m < 0$ $90° < \emptyset < 180°$

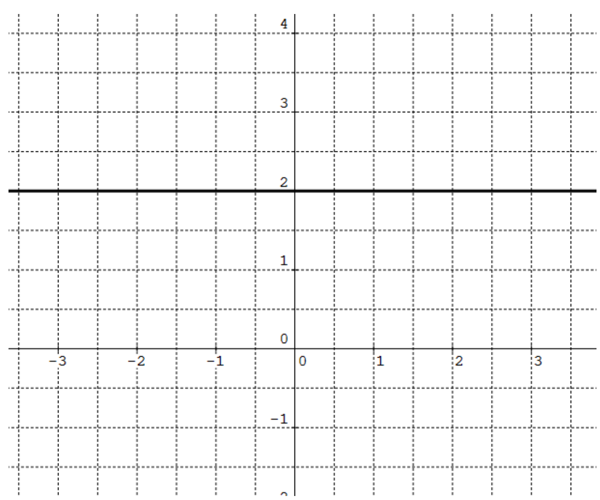
$90° < \emptyset < 180°$



$m = -$

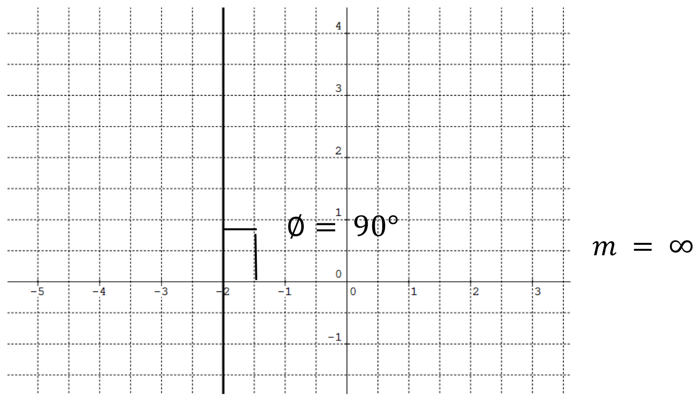
Nota: Se dice que la pendiente es decreciente.

Si la pendiente de la recta es:
Cero; la recta es horizontal y la $m = 0$ $\emptyset = 0°$



$m = 0$

Si la pendiente de la recta es:
Indefinida; la recta es vertical y la $m = \infty$ $\emptyset = 90°$



Explicamos

Valor del ángulo de inclinación

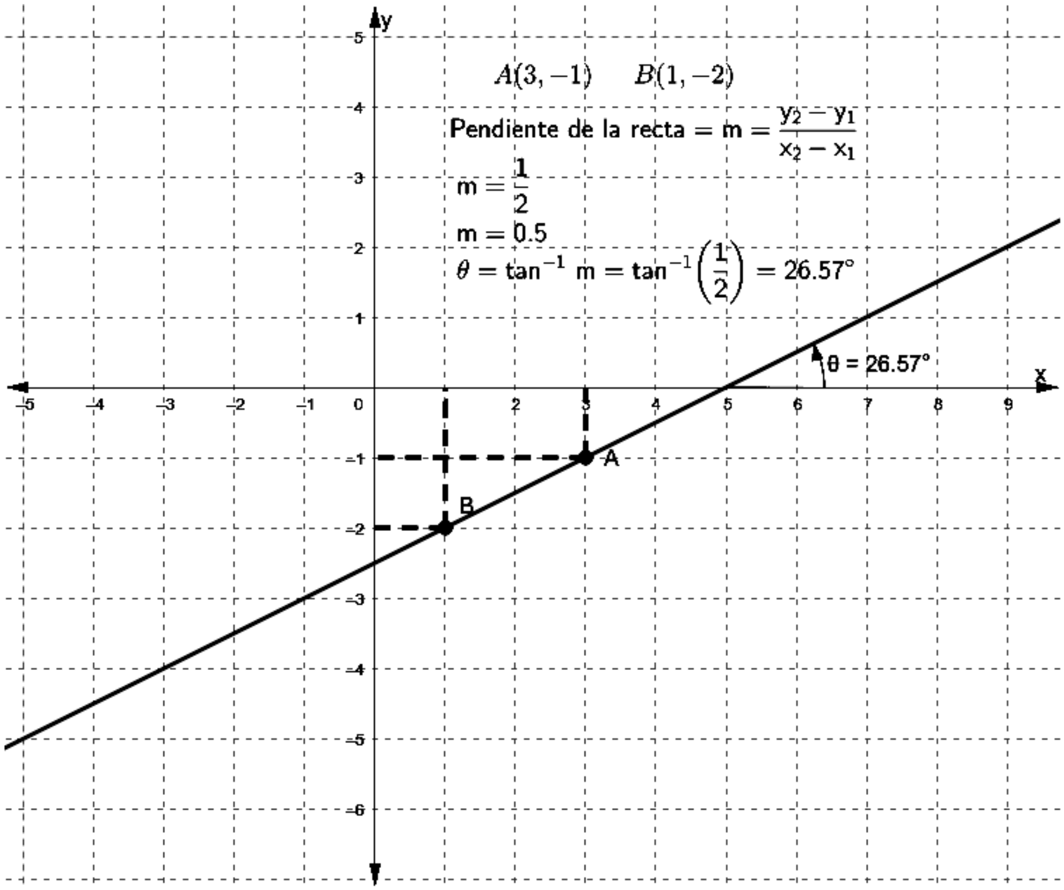
A partir de la ecuación

$$m = \tan \emptyset$$

despejando para el ángulo de inclinación de una recta, se tiene:

$$\emptyset = tan^{-1}\, m$$

Como se muestra en la siguiente figura el ángulo de inclinación entre dos puntos es:



Para más información.

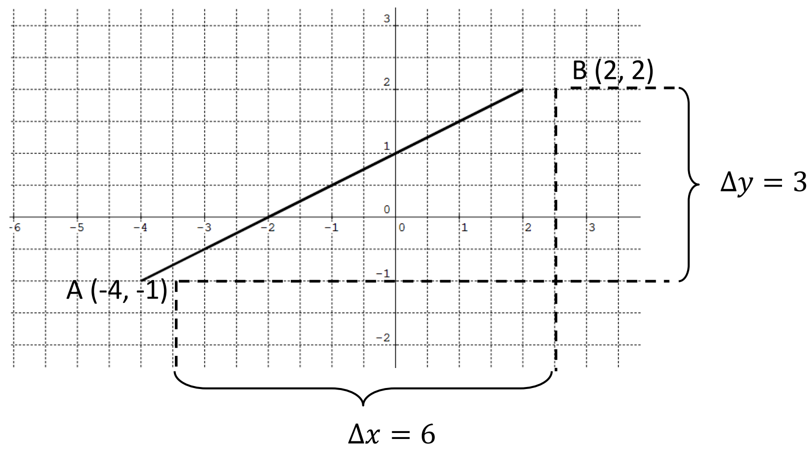
Revisa los procedimientos para obtener la pendiente de una recta

Ejemplo 1: Pendiente positiva.

La siguiente gráfica muestra el lugar geométrico de los pares ordenados:
A (-4,-1) y B (2,2).

Encuentra la pendiente de la recta determinada por dichos pares de puntos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



A (-4, -1) = A (X_1, Y_1)

B (2, 2) = B (X_2, Y_2)

por lo tanto:

X_1	-4
Y_1	-1
X_2	2
Y_2	2

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(2 - (-1))}{(2 - (-4))} = \frac{(2 + 1)}{(2 + 4)} = \frac{3}{6}$$

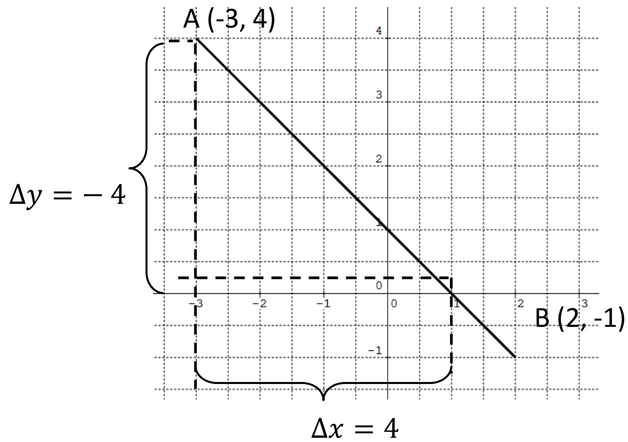
simplificando: $m = \frac{1}{2}$

Nota: La pendiente es positiva ya que la gráfica es ascendente, (de derecha a izquierda).

Ejemplo 2: Pendiente negativa.

La siguiente gráfica muestra el lugar geométrico de los pares ordenados:
A (-3,4) y B (2, -1).

Encuentra la pendiente de la recta determinada por dichos pares de puntos:



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{4} = -1$

A (-3, 4) = A (X_1, Y_1) B (2, -1) = B (X_2, Y_2)

por lo tanto:

X_1	-3
Y_1	4
X_2	2
Y_2	-1

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(-1 - 4)}{(2 - (-3))} = \frac{(-5)}{(2 + 3)} = \frac{-5}{5}$$

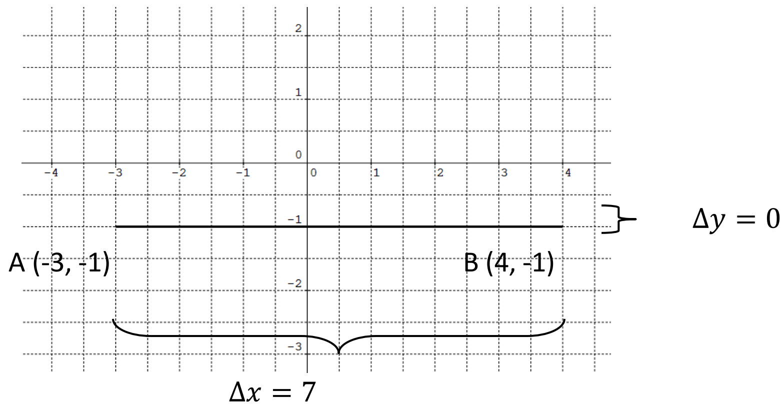
simplificando: $m = -1$

Nota: La pendiente es negativa ya que la gráfica es descendente, (de izquierda a derecha).

Ejemplo 3: Pendiente igual a cero.

La siguiente gráfica muestra el lugar geométrico de los pares ordenados:
A (-3,-1) y B (4, -1).

Encuentra la pendiente de la recta determinada por dichos pares de puntos:



A (-3, -1) = A (X_1, Y_1)   B (4, -1) = B (X_2, Y_2)

por lo tanto:

X_1	-3
Y_1	-1
X_2	4
Y_2	-1

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(-1 - (-1))}{(4 - (-3))} = \frac{(-1 + 1)}{(4 + 3)} = \frac{0}{7}$$

por lo tanto: $m = 0$

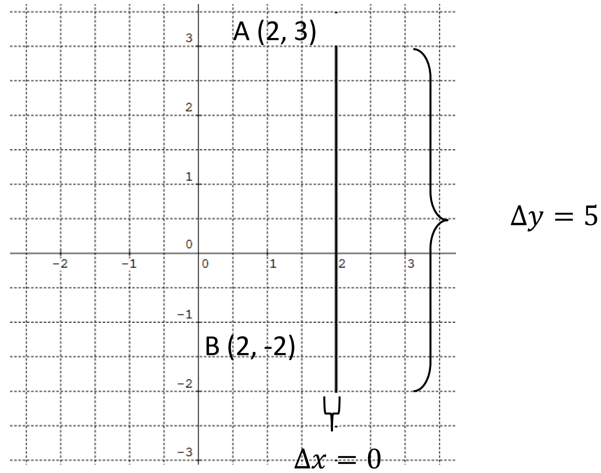
Nota: La pendiente es 0 lo que indica que la recta no tiene ángulo de inclinación.

Ejemplo 4: Pendiente indefinida.

La siguiente gráfica muestra el lugar geométrico de los pares ordenados:

A (2, 3) y B (2, -2).

Encuentra la pendiente de la recta determinada por dichos pares de puntos:



A (2, 3) = A (X_1, Y_1) B (2, -2) = B (X_2, Y_2)

por lo tanto:

X_1	2
Y_1	3
X_2	2
Y_2	-2

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(-2-3)}{(2-2)} = \frac{(-5)}{(0)} = \frac{-5}{0}$$

por lo tanto: $m = \infty$

Nota: La pendiente es indefinida o infinita ∞ lo que indica que la recta es perpendicular al eje de las "x".

Ejemplo 5: Cálculo de la Pendiente cuando se conoce el ángulo.

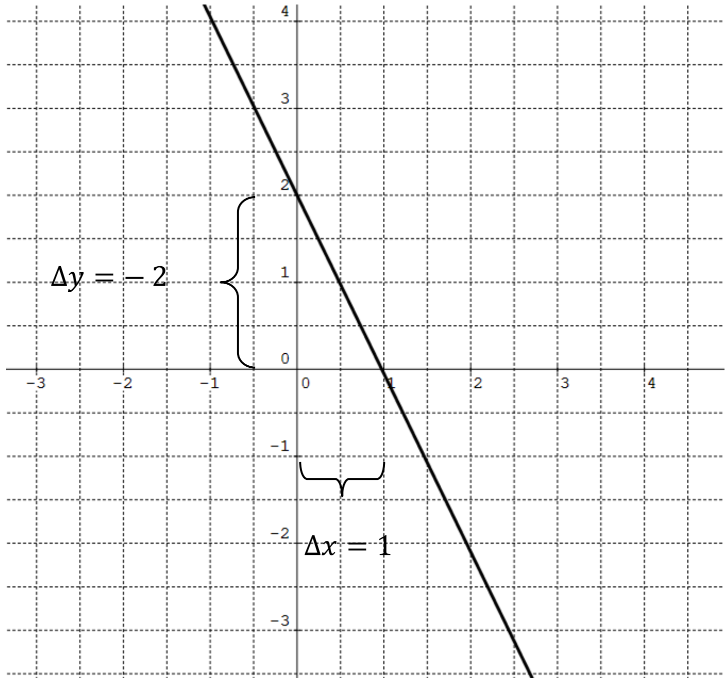
Calcula la pendiente, dado el ángulo de inclinación e interpreta su representación gráfica.

$$\emptyset = 116°$$

Fórmula: $m = \tan \emptyset$

Desarrollo: $m = \tan \emptyset = \tan(116°) = -2.05$

Aproximadamente: $m = -2$



Interpretación gráfica:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2$$

Como la pendiente es negativa esto significa que la recta es descendente (va de izquierda a derecha), además como la pendiente tiene un valor de 2, significa que por cada 2 unidades de cambio en el eje “y” tendrá una unidad de cambio en el eje “x”.

Ejemplo 6: Cálculo del ángulo cuando se conoce la pendiente.

Dada la pendiente, encuentra el ángulo de inclinación e interpreta su representación gráfica.

$m = -3$

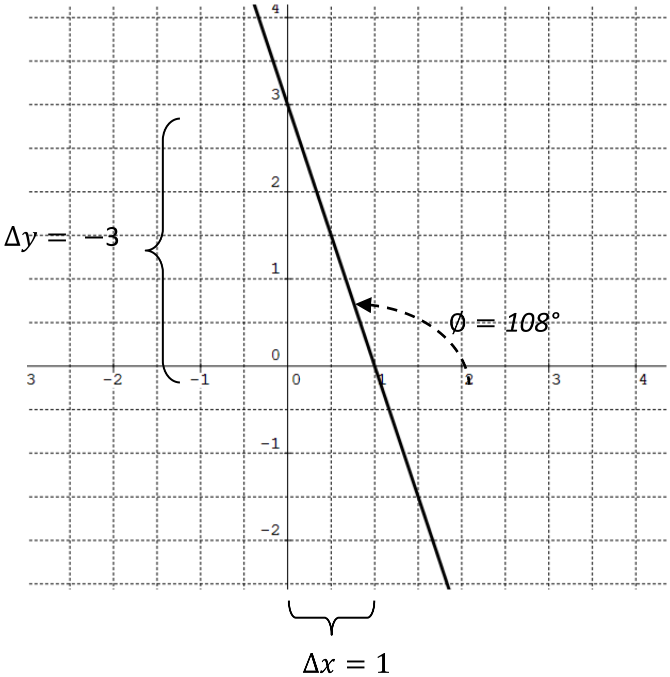
Fórmula: $m = \tan \emptyset$

Desarrollo: $\emptyset = tan^{-1}\ m = tan^{-1}\ (-3) = -71.56$

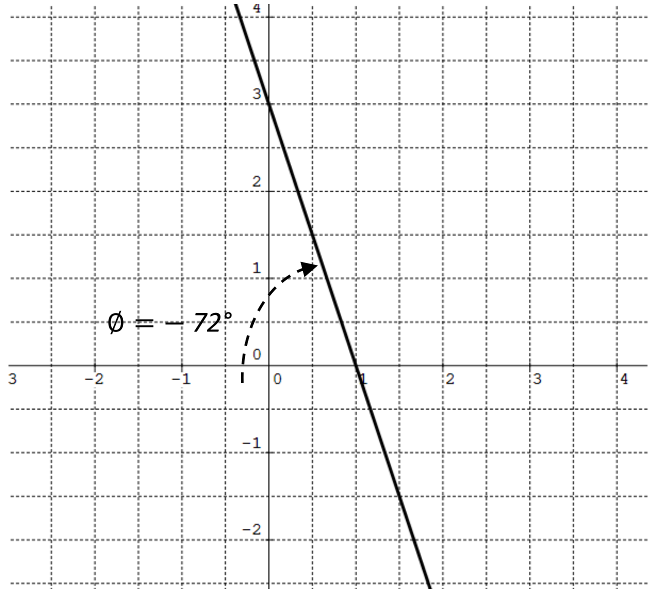
Aproximadamente: $\emptyset = -72°$

Como la pendiente es negativa esto significa que debemos realizar la siguiente operación:

180° - 72° = 108°



ó



Interpretación gráfica:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{1} = -3$$

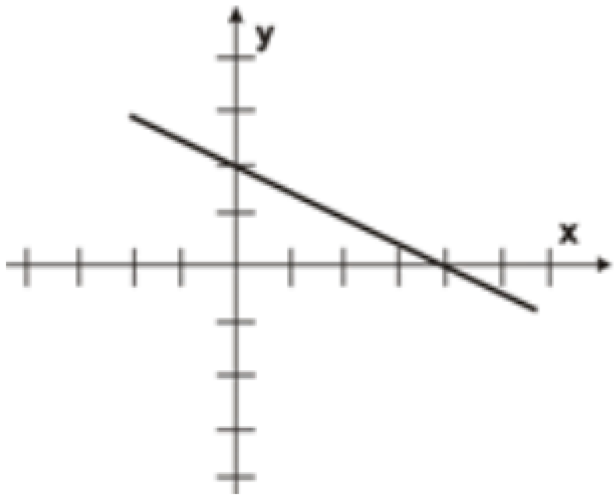
Como la pendiente es negativa esto significa que la recta es descendente (va de izquierda a derecha), además como la pendiente tiene un valor de 3, significa que por cada 3 unidades de cambio en el eje "y" tendrá una unidad de cambio en el eje "x".

Para más información.

Evaluamos

Instrucción 1: Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

1.- ¿Cuál es el valor de la pendiente (m) y la ordenada al origen (b) de la recta que se muestra en la gráfica?



a) $m = -\frac{1}{2} \quad b = 4$

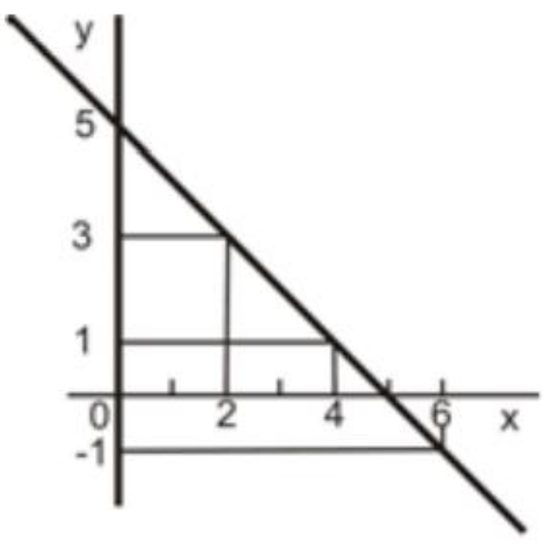
b) $m = -2 \quad b = 4$

c) $m = -\frac{1}{2} \quad b = 2$

d) $m = -2 \quad b = 2$

2.- ¿Cuál expresión algebraica satisface los datos presentados en la gráfica?

Nota: Una de las expresiones algebraicas de la línea recta es $y = mx + b$, conocida como la Forma Pendiente-ordenada al origen.



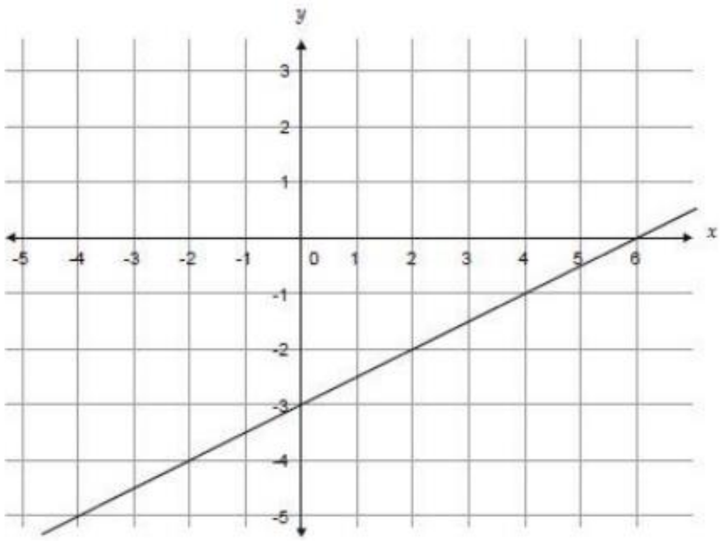
a) $y = -x + 3$

b) $y = -x + 5$

c) $y = 5x$

d) $y = 3x - 1$

3.- ¿Cuál es la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen?



a) $y = -\frac{1}{2}x - 3$

b) $y = 2x - 3$

c) $y = 2x + 6$

d) $y = \frac{1}{2}x - 3$

Instrucción 2: Contesta los siguientes reactivos, graficando en hojas milimétricas.

4.- Encuentra y gráfica la pendiente de la recta que pasa por los siguientes pares de puntos:

a) A (6, 4), B (2, -3)

b) A (-3, 0), B (1, 2)

5.- Dado el ángulo de inclinación de una recta encuentra su pendiente y su gráfica.

a) $\emptyset = 120°$

b) $\emptyset = 96.35°$

6.- Dada la pendiente de una recta encuentra su ángulo de y su gráfica.

a) $m = 3$

b) $m = -5/4$

Progresión 3

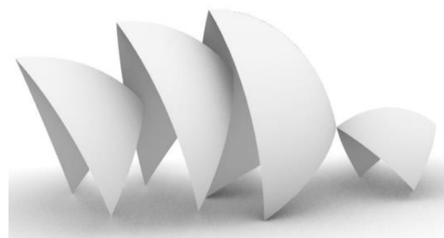
Deduce propiedades geométricas (simetría, extensión, etc.) de curvas planas, a partir de sus expresiones algebraicas, considerando que polinomios de dos variables con coeficientes reales tienen un conjunto solución que puede graficarse en el plano cartesiano.

Meta de aprendizaje	Categoría
C1M2. Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C2M1.** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. **C4M1.** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	**C1.** Procedural. **C2.** Procesos de intuición y razonamiento. **C4.** Interacción y lenguaje matemático.
Subcategoría	**Contenido**
S1. Elementos aritmético algebraicos. **S2.** Elementos geométricos. **S1.** Capacidad para observar y conjeturar. **S2.** Pensamiento intuitivo. **S1.** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. **S3.** Ambiente matemático de comunicación.	**1.-** Propiedades geométricas. **2.-** Polinomios con dos variables. **3.-** Solución grafica en el plano cartesiano.

Enganchamos

Ópera de Sídney.

Inaugurada en 1973, la ópera de Sídney es una de las obras arquitectónicas más importantes del siglo XX.
Esta estructura en forma de valvas se asienta en una vasta plataforma, rodeada de amplias terrazas, que cumplen la función de paseos peatonales.
Cada trozo de casquete se refleja para obtener cada uno de los objetos esféricos que compondrán el modelo, una vez que se tienen los objetos esféricos definidos en el proceso se reduce a aplicarles giros y desplazamientos hasta colocarlos en la posición final.



Te invitamos a revisar el siguiente **código QR**, donde podrás tener información adicional.

Exploramos

Propiedades geométricas

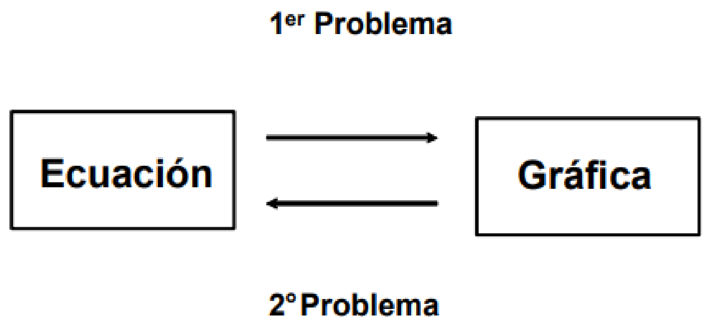
Concepto de lugar geométrico.

Recordando un lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen una determinada condición. La solución de un problema de lugares geométricos es una ecuación, la ecuación de todos los puntos que cumplen la dicha condición.

Existen dos problemas fundamentales en la Geometría Analítica:

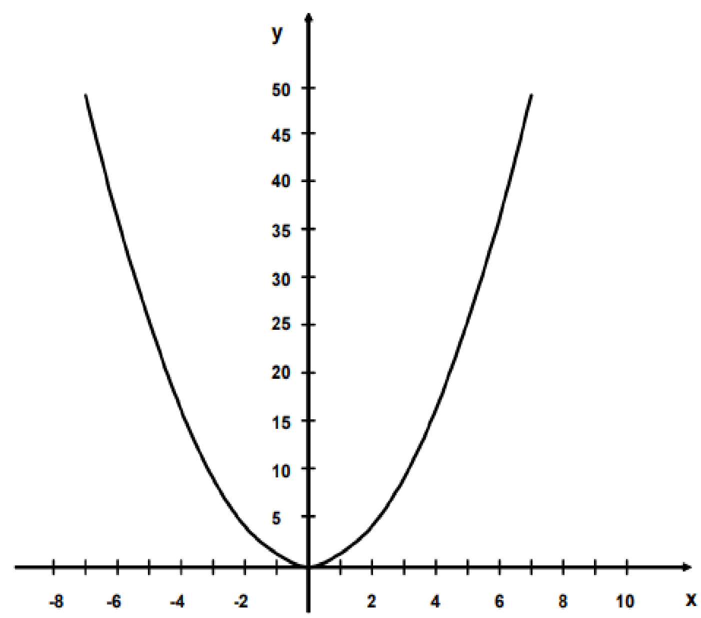
1. Dada una ecuación hallar el lugar geométrico que representa.

2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.



Por ejemplo, el lugar geométrico formado por la función $y = x^2$ es:

x	y
-7	49
-6	36
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49



El lugar geométrico se forma a partir de todos los puntos que satisfacen la condición, es decir, su gráfica representa la unión de una infinidad de puntos.

Sin embargo, en la práctica se toma como referencia las parejas ordenadas que se obtienen de la tabulación y se unen.

Para el ejemplo anterior son:

$(-5,25)$, $(-4,16)$, $(-3,9)$, $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$, $(4,16)$ y $(5,25)$.

Puede apreciarse que el punto A $(-5,-15)$ no pertenece al lugar geométrico, ya que, si se sustituyen los valores, no satisface la ecuación.

Explicamos

Discusión de una curva.

Para trazar una gráfica, el procedimiento consiste en localizar puntos derivados de una tabulación y dibujar una línea continua que pasa por todos ellos. Sin embargo, no todas las gráficas son continuas y, por lo tanto, este procedimiento no es válido ya que se introducirían errores en el trazado de las gráficas.

Para evitar errores de este tipo se debe realizar una investigación preliminar de la ecuación antes de trazar la curva.

A esto se le conoce como discusión de una curva a través del método de los seis pasos. Las características por analizar son:

1) Intersecciones con los ejes
2) Simetría
3) Extensión o campo de variación
4) Asíntotas
5) Tabulación
6) Trazado de la gráfica

Intersecciones con los ejes.

Son los puntos en que la gráfica del lugar geométrico corta a los ejes coordenados.

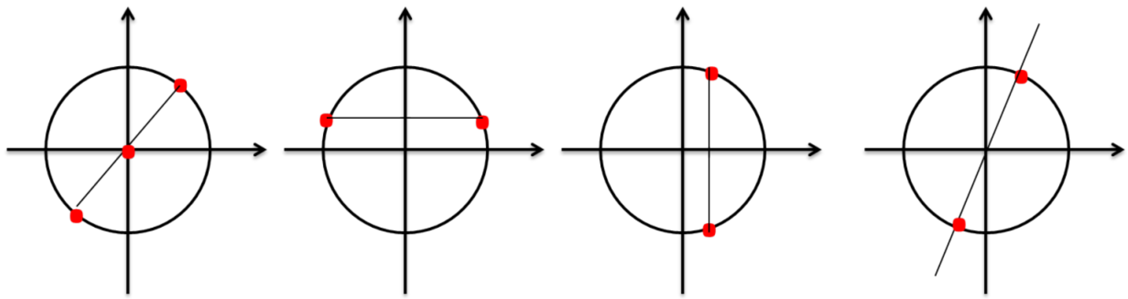
Para hallar la intersección con el eje x se hace $y = 0$ en la ecuación dada y se despeja la variable "x". Análogamente, para hallar la intersección con el eje y se hace x = 0 y se despeja "y".

Simetría.

Existen tres casos posibles de simetría para un lugar geométrico:

a) Una curva es simétrica con respecto al eje x si para cada valor de x se obtienen dos valores iguales, pero de signos contarios de y.

Por ejemplo, la circunferencia es simétrica con respecto al eje "X", al eje "Y", el origen y cualquier recta al origen.



Por lo tanto, si una ecuación no se altera al sustituir y por $-y$, su representación gráfica o lugar geométrico es simétrica respecto al eje x.

b) Una curva es simétrica con respecto al eje "y" si para cada valor de y se obtienen dos valores iguales, pero de signos contarios de "x".

Por lo tanto, si una ecuación no se altera al sustituir x por $-x$, su representación gráfica o lugar geométrico es simétrica respecto al eje y.

c) Una curva es simétrica con respecto al origen si para cualquier punto que pertenezca al primer cuadrante equidista de otro punto que esté en el tercer cuadrante o, si para cualquier punto que se ubique en el segundo cuadrante, equidista de otro punto que se localice en el cuarto cuadrante.

Por lo tanto, si una ecuación no se altera al sustituir x por $-x$ "y" y por $-y$ simultáneamente, su representación gráfica o lugar geométrico es simétrica respecto al origen.

Extensión.

La extensión de una curva es la determinación de los intervalos de variación para los cuales los valores de las variables "x" y "y" son reales. Los valores de cada una de las variables para las cuales la otra se hace imaginaria, carecen de sentido.

Aquí se pueden presentar dos opciones:

a) Que se tenga un cociente. Aquí lo que debe evitarse es que el denominador se haga cero.

b) Que tenga un radical con índice par. Aquí lo que debe cuidarse es que su argumento sea positivo o cuando menos igual a cero.

Si no sucede ninguna de las dos opciones anteriores, entonces existe la gráfica en “x” para toda “y” y en “y” para toda “x”.

Asíntotas.

Si para una curva dada existe una recta tal que a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente de su origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta se llama asíntota de la curva. Las asíntotas pueden ser horizontales o verticales.

Un lugar geométrico tiene:

- Una asíntota vertical cuando crece indefinidamente si x tiende a un valor finito.
- Una asíntota horizontal cuando a medida que x crece indefinidamente, la función tiende a un número finito.

Un lugar geométrico puede tener más de una asíntota horizontal o vertical y sólo existen si hay expresiones racionales de las formas:

$$f\ (x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad o \quad g(y) = \frac{p(y)}{q(y)}$$

Por ejemplo, la curva $y = \frac{1}{(x-3)(x+5)}$ tiene dos asíntotas verticales, $x = 3$

Y la otra en $x = -5$

En el caso de las funciones racionales, las asíntotas horizontales se deducen de la expresión despejada para x y de los valores de y que anulan el denominador.

Por ejemplo, la curva $x = \frac{1}{y\ (y^2-4)(2y+12)}$ tiene cuatro asíntotas horizontales:

en $y = 0$, $y = 2$, $y = -2$ y en $y = -6$.

Este paso es una consecuencia directa de la extensión.

Te invitamos a revisar el **código QR**, donde podrás tener información adicional.

Elaboramos

Instrucciones: Discute la siguiente curva, mediante el método abordado anteriormente:

$$xy - 3y - 5x = 0$$

Solución:

Intersección con los ejes:

Con respecto al eje x, se hace que $y = 0$

$$xy - 3y - 5x = 0$$

$$x(0) - 3(0) - 5x = 0$$

$$0 - 0 - 5x = 0$$

$$-5x = 0$$

$$x = \frac{0}{-5} = 0$$

Por lo tanto, la curva corta el eje “x” en 0

Con respecto al eje y, se hace que $x = 0$

$$xy - 3y - 5x = 0$$

$$(0)y - 3y - 5(0) = 0$$

$$0 - 3y - 0 = 0$$

$$-3y = 0$$

$$y = \frac{0}{-3} = 0$$

Por lo tanto, la curva corta el eje “y” en 0

Simetría:

Con respecto al eje x, (“y” por “-y”)

$$xy - 3y - 5x = 0$$
$$x(-y) - 3(-y) - 5x = 0$$
$$-xy + 3xy - 5x = 0$$

Por lo tanto, como $xy - 3y - 5x = 0$ es diferente a $-xy + 3xy - 5x = 0$

la curva no es simétrica con respecto a el eje “x”.

Con respecto al eje y, (“x” por “-x”)

$$xy - 3y - 5x = 0$$

$$(-x)y - 3y - 5(-x) = 0$$
$$-xy - \ 3y + 5x = 0$$

Por lo tanto, como $xy - 3y - 5x = 0$ es diferente a $-xy - 3y + 5x = 0$

la curva no es simétrica con respecto a el eje “y”.

Con respecto al origen, (“x” por “-x”) y (“y” por “-y”)

$$xy - 3y - 5x = 0$$
$$(-x)(-y) - 3(-y) - 5(-x) = 0$$
$$xy + \ 3y + 5x = 0$$

Por lo tanto, como $xy - 3y - 5x = 0$ es diferente a $xy + 3y + 5x = 0$

la curva no es simétrica con respecto al origen,

Extensión:

Se despeja la ecuación original para x.

$$xy - 3y - 5x = 0$$
$$xy - 5x = 3y$$
$$x(y - 5) = 3y$$
$$x = \frac{3y}{(y - 5)}$$

Por lo tanto, existen valores en x para todo valor en y excepto en $y = 5$ Se despeja la ecuación original para y.

$$xy - 3y - 5x = 0$$

$$xy - 3y = 5x$$
$$y(x-3) = 5x$$
$$y = \frac{5x}{(x-3)}$$

Por lo tanto, existen valores en y para todo valor en x excepto en $x = 3$

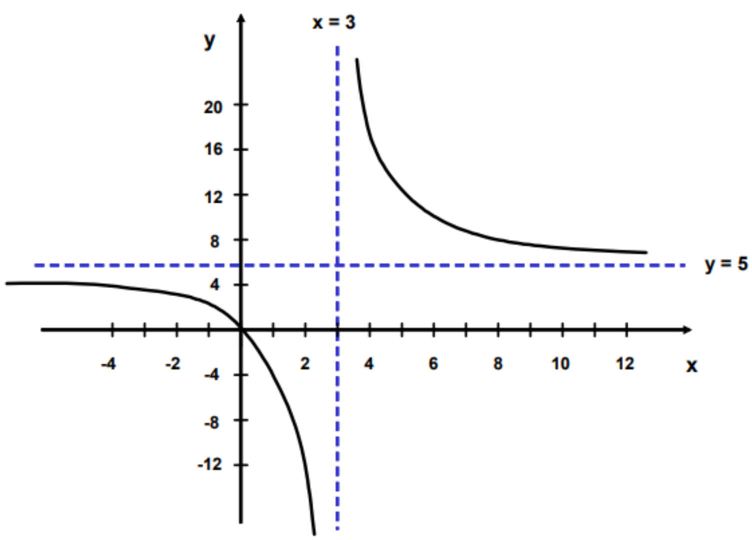
Al realizar la tabulación para los valores de x en la ecuación

$$y = \frac{5x}{(x-3)}$$

Se tienen los siguientes valores

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2.5	2	1.25	0	-2.5	-10	No definido	20	12.5	10	8.75	8	7.5	7.14

Por lo que su grafica estará representada por:



Asíntotas: Se tiene que para los valores de: $y = 5$

$x = 3$

Para abordar mejor el tema de las asíntotas se puede acceder al siguiente enlace

Evaluamos

Instrucciones: Realiza las operaciones correspondientes en tu cuaderno.

En la siguiente función $x^2 + y^2 = 25$ encontrar:

a) Los puntos de intersección con los ejes
b) Los puntos de simetría
c) La extensión
d) Las asíntotas (en caso de tener)

Progresión 4

Emplea métodos gráficos para entender el comportamiento de dos variables que estén en relación de proporcionalidad directa para deducir la ecuación de la recta que pasa por el origen y posteriormente trabajar el caso general de una recta en el plano.

Meta de aprendizaje	Categoría
C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	**C3.** Solución de problemas y modelación.
Subcategoría	**Contenido**
S3. Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.	**1.-** La ecuación de la recta. **2.-** La ecuación general de la recta.

Enganchamos

La ecuación de la recta.

La ecuación de la recta está involucrada profundamente en nuestro día a día.
Posee variadas aplicaciones, como describir la posición, el movimiento y la inclinación de un terreno; también es de gran utilidad en economía, para analizar distintas variables.
Estos son algunos de los usos de la función lineal.

Te invitamos a revisar el **código QR**, donde podrás tener información adicional.

Exploramos

Formas de la ecuación de una recta.

La ecuación de la línea recta se puede presentar de distintas maneras, destacando en cada caso alguna característica del lugar geométrico.

Pendiente-ordenada	Punto- pendiente	General	Simétrica
$y = mx + b$	$y - y_1 = m\,(x - x_1)$	$Ax + By + C = 0$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
m es la pendiente y *b* es la ordenada.	(x_1, y_1) son las coordenadas de cualquier punto de la	Los coeficientes A, B y C son números	*a* = a la abscisa al origen y

	recta dada y *m* es la pendiente.	reales cualesquiera, con la condición de que A o B deben ser diferente de cero y C puede ser cualquier número o cero.	b = a la ordenada al origen.

Elaboramos

La ecuación general de la recta.

La ecuación general de la recta (o ecuación implícita) se muestra a continuación:

$$Ax + By + C = 0$$

Se tiene la siguiente ecuación de la recta y se pretende encontrar el valor de la pendiente "m" y el valor de la ordenada "b" (el valor que toca el eje "y"):

$$2x - 3y + 4 = 0$$

En la que A y B no pueden ser nulos.
La ecuación general se debe presentar de forma que A sea positiva.

La ecuación explícita de la recta se obtiene al despejar de la ecuación general la variable "y", siempre que B sea distinta de cero.

$$y = mx + b$$

Por lo que se debe despejar la "y":

$$2x - 3y + 4 = 0$$

$$-3y + 4 = 2x$$

$$-3y = -2x - 4$$

$$y = \frac{-2x - 4}{-3}$$

$$y = \frac{-2x}{-3} + \frac{(-4)}{(-3)}$$

$$y = \frac{2x}{3} + \frac{4}{3}$$

Por lo anterior se tiene que:

$$m = \frac{2}{3} = 0.67$$

$$b = \frac{4}{3} = 1.33$$

También se puede encontrar la pendiente a partir de la ecuación general:

$$2x - 3y + 4 = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

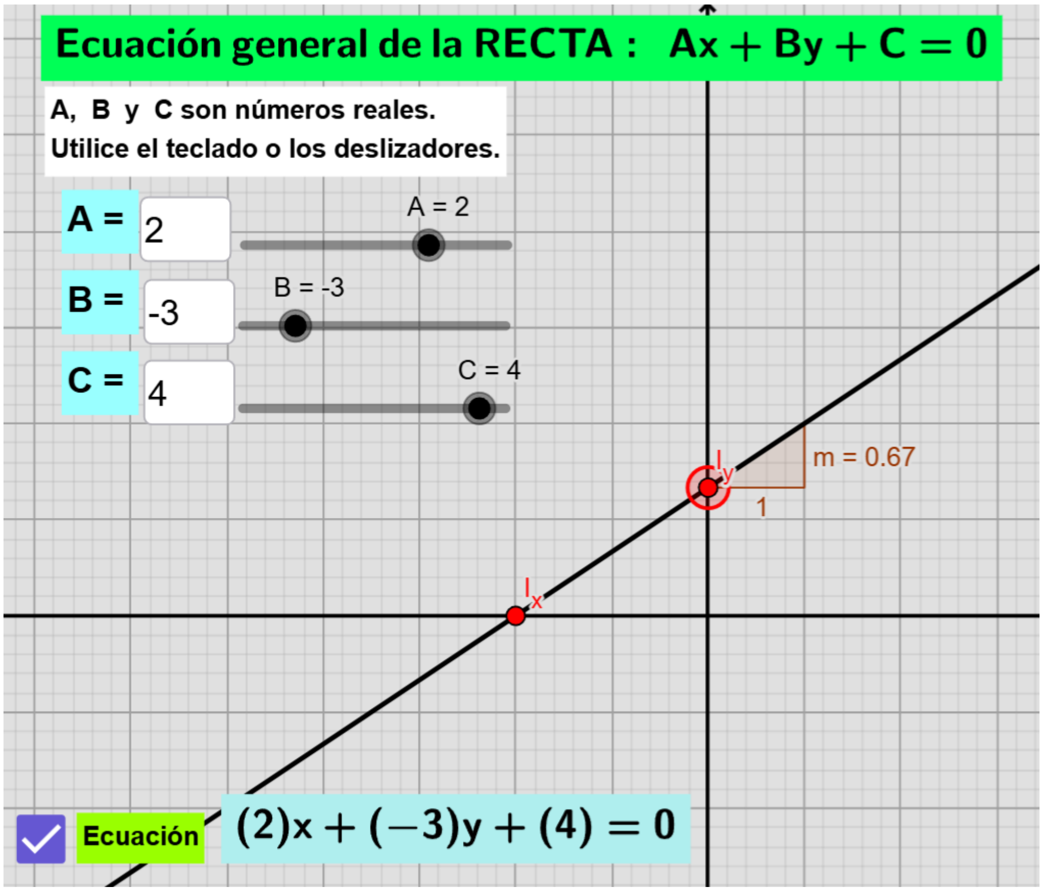
$$A = 2 \qquad B = -3$$

$$m = -\frac{A}{B}$$

$$m = -\frac{2}{(-3)}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

Para realizar la representación gráfica del ejercicio anterior se puede acceder al siguiente enlace:



Se puede observar que la pendiente es de $m = \ 0.66$ que equivale a $m = \frac{2}{3}$

Se puede observar que la ordenada es de b= 1.33 que equivale a $b = \frac{4}{3}$

Explicamos

1) Encuentra la ecuación de la recta que paso por los puntos A (-2, 3) y B (5, -2) en las formas:

a) **Punto-pendiente** $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

b) **Pendiente-ordenada** $y = mx + b$

c) **General** $Ax + By + C = 0$

d) **Simétrica** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Solución:
Primero hay que encontrar la pendiente:

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

para lo cual hay que asignarles las coordenadas correspondientes a los puntos dados:

A (-2, 3) = A (X_1, Y_1) y B (5, -2) = B (X_2, Y_2)

por lo tanto:

X_1	-2	Y_1	3
X_2	5	Y_2	-2

sustituyendo en la ecuación de la pendiente tenemos:

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(-2 - 3)}{(5 - (-2))} = \frac{(-5)}{(5 + 2)} = \frac{-5}{7}$$

a) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **Punto-pendiente**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Paso 1: Se tiene que la pendiente es:

$$m = \frac{-5}{7}$$

Paso 2: Se toma cualquier punto de los anteriormente dados, por ejemplo:

A (-2, 3) = A (X_1, Y_1)

Paso 3: Sustituyendo los valores del punto A (-2, 3) en la ecuación y realizando las operaciones con los signos se tiene que:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{-5}{7}(x - (-2))$$

$$y - 3 = \frac{-5}{7}(x + 2)$$

Paso 4: De lo cual se tiene que la ecuación de la recta en su forma punto – pendiente es:

$$y - 3 = \frac{-5}{7}x + 2$$

b) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **Pendiente-ordenada**

$$y = mx + b$$

se toma la ecuación de la recta en su forma punto – pendiente

$y - 3 = \frac{-5}{7}(x + 2)$ para despejar la variable *y*:

Paso 1: Para despejar la variable y, se debe multiplicar ambos lados por 7.	$y - 3 = \frac{-5}{7} \; (x + 2)$ $7\,(y - 3) = (7)\; \frac{-5}{7} \; (x + 2)$
Paso 2: Se realizan las operaciones correspondientes de la multiplicación.	$7y - 21 = -5 \; (x + 2)$ $7y - 21 = -5x - 10$
Paso 3: Se les suman a ambos lados +21 y eliminando -21 +21 del lado izquierdo y realizando la resta -10 +21 de lado derecho se tiene que:	$7y - 21 + 21 = -5x - 10 + 21$ $7y - \cancel{21} + \cancel{21} = -5x - 10 + 21$ $7y = -5x + 11$
Paso 4: Se divide entre 7 a ambos lados en todos sus términos.	$\frac{7}{7}y = \frac{-5}{7}x + \frac{11}{7}$
Paso 5: Se realizan las operaciones correspondientes para obtener la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada:	$y = \frac{-5}{7}x + \frac{11}{7}$

En donde la pendiente es $m = \frac{-5}{7}$ y la ordenada es $b = \frac{11}{7}$

c) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **General** $Ax + By + C = 0$ se utiliza la ecuación de la recta en su forma punto – ordenada $y = \frac{-5}{7}x + \frac{11}{7}$

para igualar a 0:

Paso 1: Se le suman a ambos lados + $\frac{5}{7}x$.	$y = \frac{-5}{7}x + \frac{11}{7}$ $y + \frac{5}{7}x = \frac{-5}{7}x + \frac{5}{7}x + \frac{11}{7}$
Paso 2: Se realizan las operaciones correspondientes en el lado derecho eliminando - $\frac{5}{7}x$ + $\frac{5}{7}x$.	$y + \frac{5}{7}x = \cancel{\frac{-5}{7}}x + \cancel{\frac{5}{7}}x + \frac{11}{7}$ $y + \frac{5}{7}x = \frac{11}{7}$
Paso 3: Se les restan a ambos lados $\frac{11}{7}$.	$y + \frac{5}{7}x - \frac{11}{7} = \frac{11}{7} - \frac{11}{7}$

Paso 4: Se realizan las operaciones correspondientes en ambos lados eliminando $\frac{11}{7} - \frac{11}{7}$ en el lado derecho.

$$y + \frac{5}{7}x - \frac{11}{7} = 0$$

Paso 5: Ordenando los términos para tener la ecuación de la recta en su forma general. $Ax + By + C = 0$

$$\frac{5}{7}x + y - \frac{11}{7} = 0$$

Paso 6: Se multiplica ambos lados por 7 y realizando las operaciones correspondientes.

$$7[\frac{5}{7}x + y - \frac{11}{7}] = 7[0]$$

$$\frac{35}{7}x + 7y - \frac{77}{7} = 0$$

Paso 7: Simplificando los coeficientes de los términos se tiene que $\frac{35}{7} = 5$ y $\frac{77}{7} = 11$

por lo que la ecuación de la recta en su forma general es:

$$Ax + By + C = 0$$

$$5x + 7y - 11 = 0$$

d) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **simétrica** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

se utiliza la ecuación de la recta en su forma general $5x + 7y - 11 = 0$

para igualar a 1:

Paso 1: Se les suman a ambos lados 11

$$5x + 7y - 11 = 0$$

$$5x + 7y - 11 + 11 = 0 + 11$$

Paso 2: Se realizan las operaciones correspondientes en cada lado en el lado izquierdo eliminando -11 + 11

$$5x + 7y - \cancel{11} + \cancel{11} = 11$$

$$5x + 7y = 11$$

Paso 3: Se divide entre 11 a ambos lados

$$5x + 7y = 11$$

$$\frac{5x+7y}{11} = \frac{11}{11}$$

Paso 4: Se realizan las operaciones correspondientes en ambos lados

$$\frac{5x}{11} + \frac{7y}{11} = 1$$

Paso 5: Se realiza la simplificación de los coeficientes de la x e y para hacerlo 1.

$$\frac{x}{\frac{11}{5}} + \frac{y}{\frac{11}{7}} = 1$$

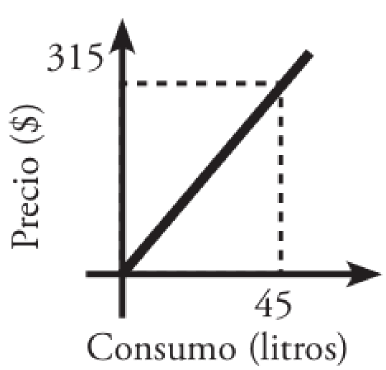
Paso 6: Como se puede observar ya se tiene la ecuación en su forma simétrica, Siendo la abscisa (a) y la ordenada (b):

a = $\frac{11}{5}$ b= $\frac{11}{7}$

Evaluamos

Instrucción 1: Resuelve los siguientes ejercicios utilizando los conceptos abordados de las ecuaciones de la recta.

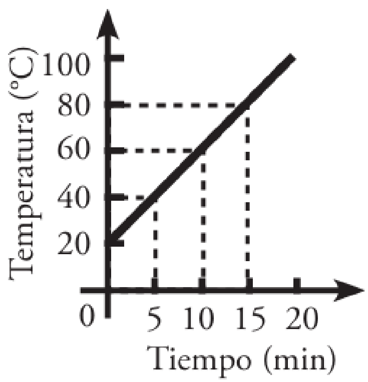
1.- La relación entre precio y consumo de gasolina se expresa en la siguiente gráfica.



¿Cuánto se paga por 22 litros de gasolina?

a) $\$ 144$
b) $\$ 150$
c) $\$ 154$
d) $\$ 158$

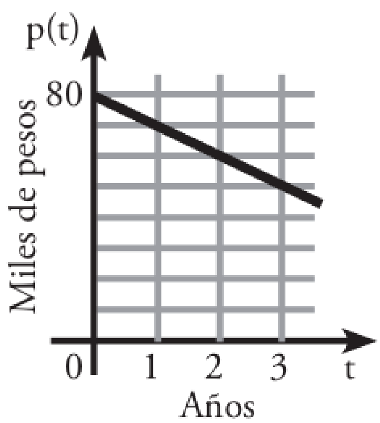
2.- Arturo calentó un recipiente de 5 litros de aceite durante 20 minutos. Los datos arrojados de temperatura $(°C)$ y el tiempo (min) los representó en la siguiente gráfica.



¿Cuál es la temperatura del aceite transcurridos 12 minutos?

a) -68
b) -28
c) 28
d) 68

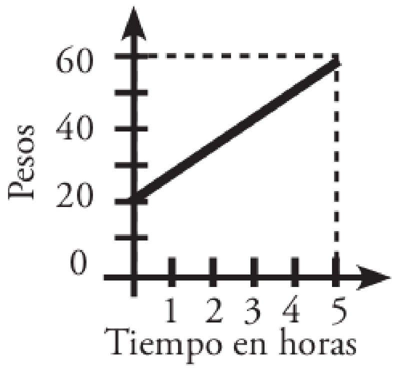
3.- Una persona adquiere un auto en $80,000 el cual se devalúa en $10,000 cada año, como se muestra en la siguiente grafica.



¿Cuál es la ecuación lineal que indica el valor del auto p(t) en el año t?

a) $p(t) = 80 - 10t$
b) $p(t) = 80 + 10t$
c) $p(t) = 10 - 80t$
d) $p(t) = 10 + 80t$

4.- La siguiente grafica relaciona el precio a pagar por el número de horas en un estacionamiento público.



¿Cuál es el pago, que se debe efectuar por haber dejado el carro en el estacionamiento durante 3 horas 15 minutos?

a) $\$ 20$
b) $\$ 40$
c) $\$ 46$
d) $\$ 50$

Instrucción 2: Resuelve en tu cuaderno lo que se pide en cada reactivo, elaborando en hojas milimétricas las gráficas correspondientes.

1.- Encuentra la ecuación de la recta en sus formas:

- **Punto-pendiente** $y - y_1 = m(x - x_1)$
- **Pendiente-ordenada** $y = mx + b$
- **General** $Ax + By + C = 0$
- **Simétrica** $\frac{x}{\mathrm{a}} + \frac{y}{\mathrm{b}} = 1$

De los siguientes puntos:

a) A (1, 1) y B (4, 6)

b) A (-10, -7) y B (-6, -2)

2.- Escribe la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada $\boldsymbol{y = mx + b}$ dada por la pendiente (m) y con intersección en “y” (b).

a) m = 3 y b = -4

b) m = 7 y b = 0

c) m = -8 y b = 3

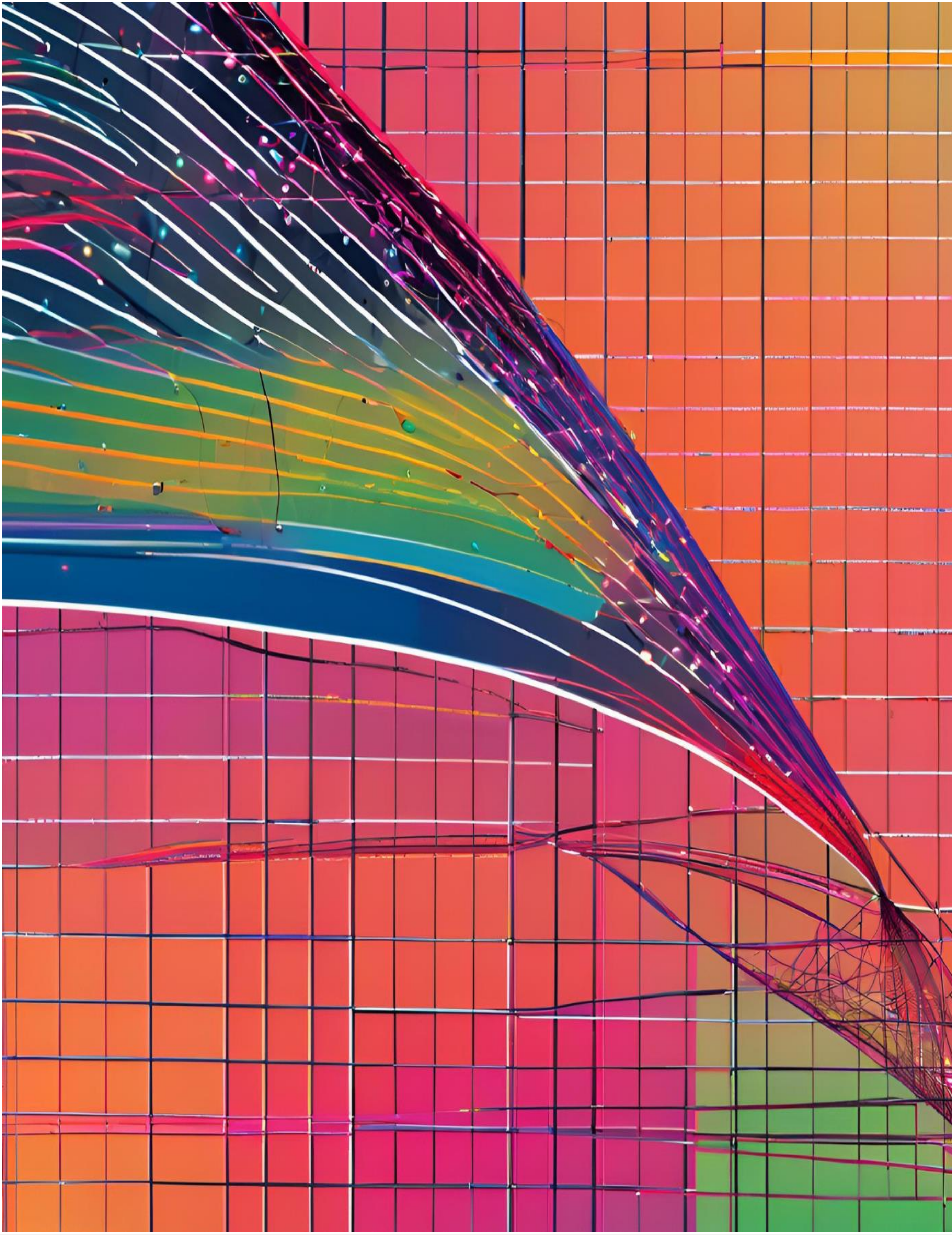
d) m = 1 y b = -8

3.- Encuentra la ecuación de la recta en sus formas:

- **Punto-pendiente** $y - y_1 = m\,(x - x_1)$
- **General** $Ax + By + C = 0$
- **Simétrica** $\frac{x}{\mathrm{a}} + \frac{y}{\mathrm{b}} = 1$

Que pasa por el punto A (X_1, Y_1) y tiene pendiente m:

1) A (4, -3) y m = -2
2) A (-6, -3) y $m = \frac{3}{2}$



PARCIAL 2

Progresión 5

Analiza cuerpos en caída libre, tiros parabólicos como los descritos por las balas disparadas por cañones u otros fenómenos que involucren en su modelación funciones cuadráticas para deducir propiedades analíticas de la parábola.

Meta de aprendizaje	Categoría
C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. **C4M1.** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	**C3.** Solución de problemas y modelación. **C4.** Interacción y lenguaje matemático.

Subcategoría	Contenido
S2. Construcción de modelos. **S3.** Ambiente matemático de comunicación.	**1.-** Propiedades de la parábola. **2.-** Ecuación general de la parábola. **3.-** Tipos de parábolas. **4.-** Tiro parabólico.

Enganchamos

La parábola es una de las cónicas con más presencia en la arquitectura.

Por ejemplo, el puente Golden Gate en San Francisco, EU (imagen de la izquierda) o el puente de la Barqueta en Sevilla España (imagen de la derecha) utilizan estructuras parabólicas para lograr una mayor y mejor estabilidad.

Puente Golden Gate.

Puente de la Barqueta.

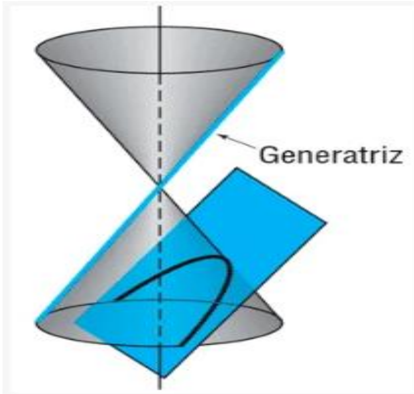
¿Sabías qué?

La parábola tiene propiedades geométricas útiles en tecnología como faros, antenas parabólicas y telescopios, donde los rayos que salen del foco y se reflejan en la parábola salen paralelos al eje. La parábola también se presenta en la naturaleza en la trayectoria de proyectiles y pelotas lanzadas, y en arquitectura donde estructuras parabólicas distribuyen uniformemente el peso y dan estabilidad a puentes

Explicamos

¿Qué es una parábola?

Una **parábola** es una curva abierta y continua cuyos puntos están a la misma distancia de un punto fijo, llamado **foco**, y de una línea recta fija, llamada **directriz**. La parábola también puede interpretarse como una sección cónica que resulta de la intersección de un cono circular recto con un plano paralelo a una de sus generatrices.

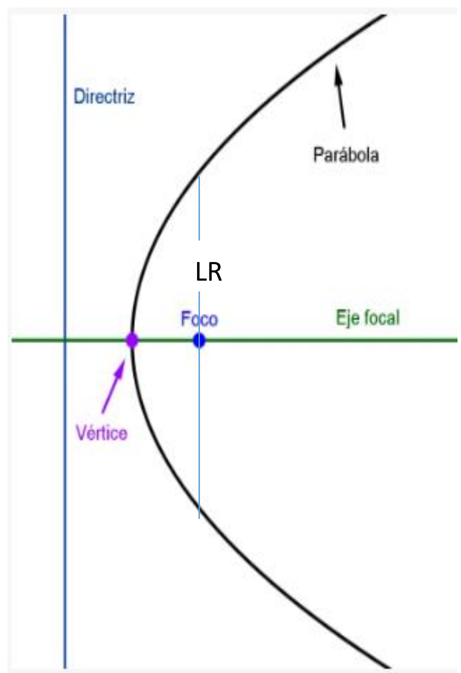


Parábola como intersección de un plano con un cono

Elementos de la parábola.

Los elementos más importantes de la parábola son:

- **Foco:** es el punto fijo que se encuentra en el eje de simetría de la parábola.
- **Directriz:** es una recta fija que junto con el foco define la parábola. Cada punto de la parábola está a una distancia igual del foco y de la directriz.
- **Distancia focal:** es la distancia entre la directriz y el foco.
- **Vértice:** es el punto de la parábola que está más cercano tanto al foco como a la directriz.
- **Eje focal:** también conocido como eje de simetría, es la línea que pasa por el foco y el vértice y es perpendicular a la directriz. Divide a la parábola en dos partes simétricas.
- **Lado recto:** LR = lado recto = $|4a|$ es el segmento que une dos puntos de la parábola, pasa por el foco y es perpendicular al eje focal.



Partes de una parábola

Propiedades y características de la parábola.

- Es un lugar geométrico.
- Es una sección de un cono.
- Es simétrica respecto a su eje.
- Cada punto de la parábola está a la misma distancia del foco y de la directriz.
- El eje de simetría es la línea que pasa por el foco y el vértice.
- El lado recto es el segmento que une dos puntos de la parábola y pasa por el foco.

Hay dos características importantes de la parábola:

- La posición del eje determina la posición de la parábola; entonces, se generan parábolas **horizontales, verticales o inclinadas.**
- La parábola siempre es simétrica con respecto a su propio eje.

Te invitamos a revisar el siguiente **código QR**, donde podrás tener información adicional.

Ecuación general de la parábola.

$$\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Donde **A** o **C** es cero, es decir solo debe aparecer un término al cuadrado X o Y pero no ambas.

Ejemplos de ecuaciones generales de la parábola:

$y^2 - 16x + 8 = 0$

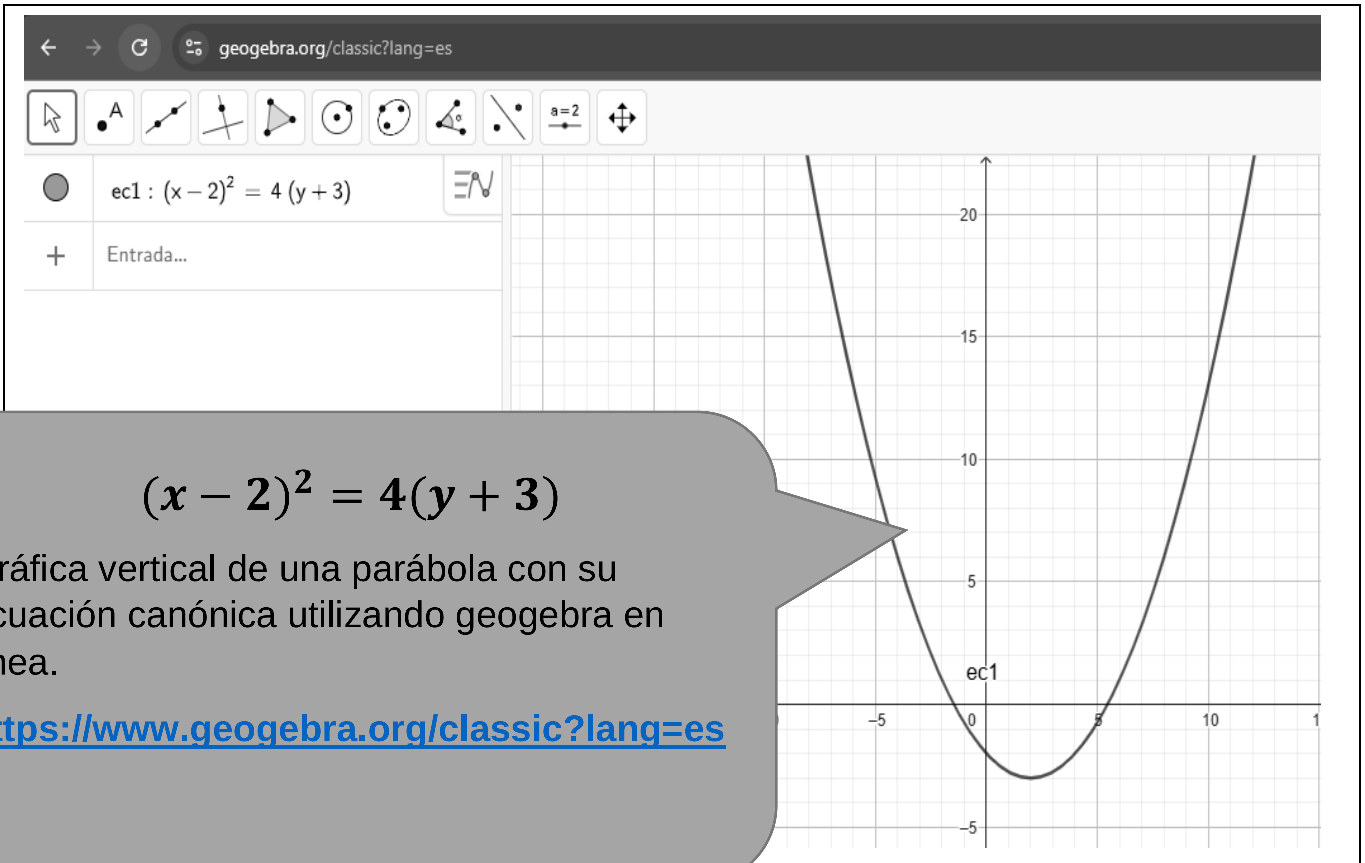
$x^2 - 4x = 8y - 28$

$2x^2 - 4x + y = -5$

Ecuación canónica.

La ecuación canónica de la parábola varía dependiendo de la ubicación del vértice y la orientación del eje focal. El parámetro p (también se usa a en lugar de p) es la distancia desde el foco al vértice, siendo 2p o 2a la distancia focal.

Vertical: (x-h)^2=4p (y-k) **Horizontal: (y-k)^2=4p (x-h)**



$$(x-2)^2 = 4(y+3)$$

Gráfica vertical de una parábola con su ecuación canónica utilizando geogebra en línea.

https://www.geogebra.org/classic?lang=es

Tipos de parábolas.

Parábolas con vértice en el origen (0,0)

Eje de simetría horizontal

1. Abierta hacia la derecha $y^2 = 4Px$

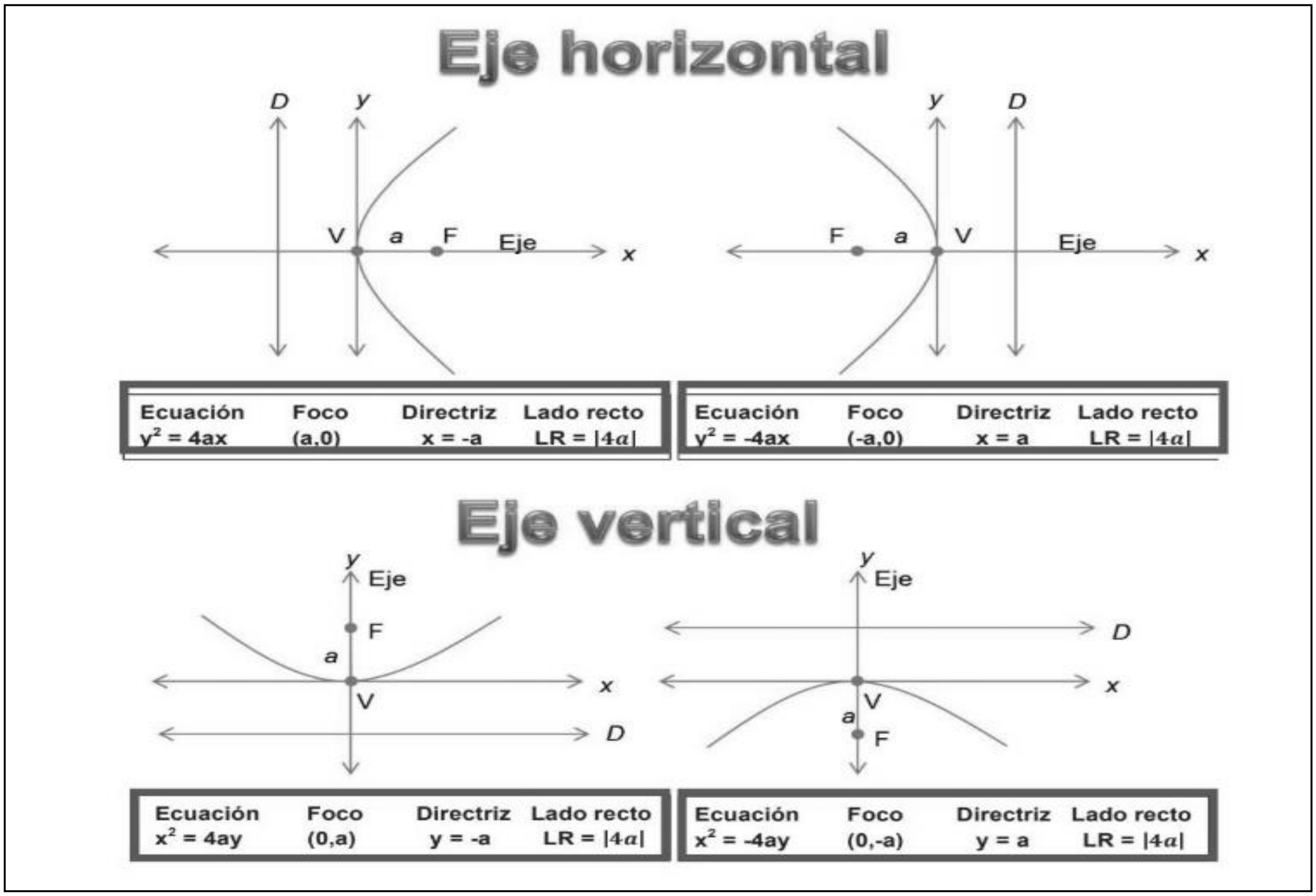
Abierta hacia la izquierda $y^2 = -4Px$

2. Eje de simetría vertical

Abierta hacia arriba convexa $x^2 = 4Py$

Abierta hacia abajo cóncava $x^2 = -4Py$

NOTA: En las ecuaciones se usa P o a, con el mismo significado



Visitar los siguientes **QR** y en tu cuaderno desarrolla los ejemplos que ahí se plantean.

Parábolas con vértice fuera del origen en coordenadas (h, k)

1. Eje de simetría horizontal

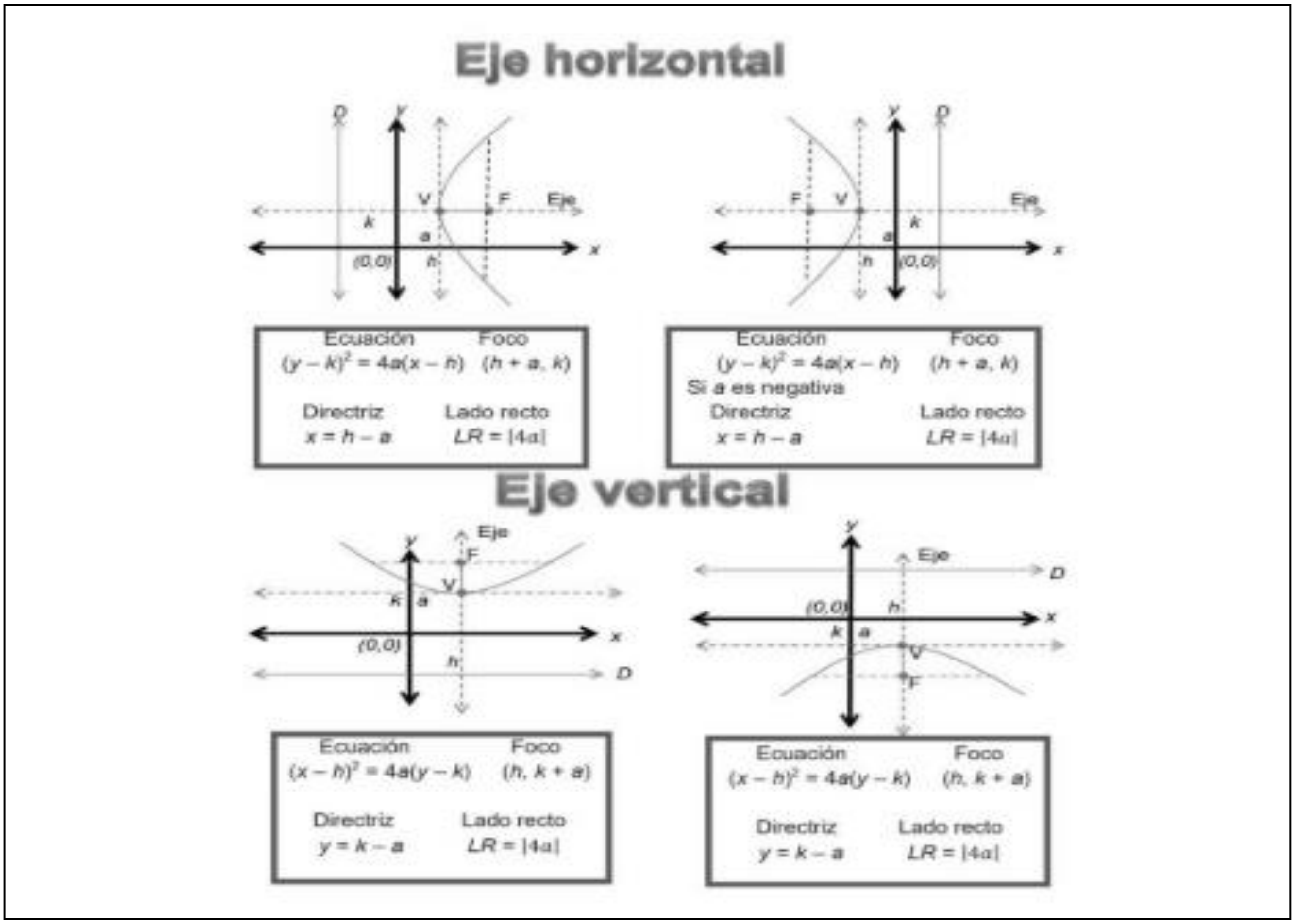
Abierta hacia la derecha: $(y-k)^2 = 4P(x-h)$

Abierta hacia la izquierda: $(y-k)^2 = -4P(x-h)$

2.- Eje de simetría vertical

Abierta hacia arriba convexa: $(x-h)^2 = 4P(y-k)$

Abierta hacia abajo cóncava: $(x-h)^2 = -4P(y-k)$



Lo anterior es posible resumirlo con la siguiente tabla cuando la ecuación de la parábola es dada en su forma canónica y se debe encontrar el vértice, foco y directriz:

ECUACION	**$(x-h)^2=4p(y-k)$**	**$(y-k)^2=4p(x-h)$**
VÉRTICE	(h,k)	(h,k)
DIRECTRIZ	Y=k-p	X=h-p
FOCO	(h, k+p)	(h+p, k)

Exploramos

Desarrollaremos el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1: Encuentre el vértice, el foco y la directriz de la siguiente parábola: $(x-3\ )^2 = 8(y+1)$

Como puede observarse la ecuación está dada en su forma canónica al tener el termino (x-3)^2 se define que es una parábola que abre de forma vertical hacia arriba es decir es positiva, ya que el 8 de la ecuación es positivo

Para definir el vértice observamos la ecuación dada: $(x-3\ )^2 = 8(y+1)$ y de acuerdo a la tabla vemos semejanza con la ecuación $(x-h\ )^2 = 4p(y-k)$

El vértice es (h, k) entonces de la ecuación definimos que h=3 y k=-1 entonces el vértice tendrá coordenada V (3,-1)

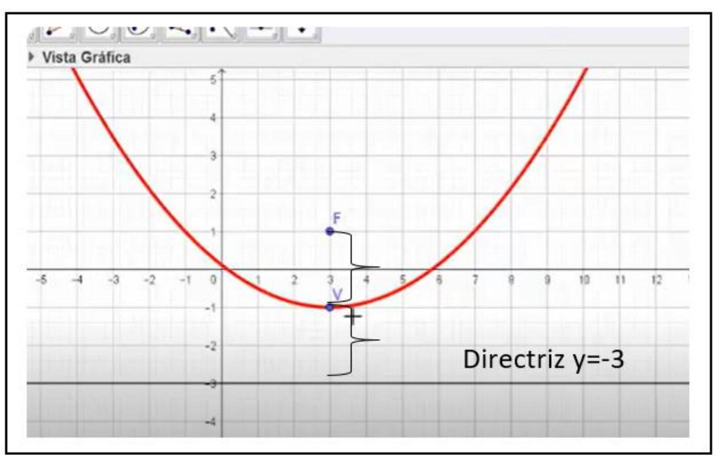
La directriz es una recta separada del vértice p unidades por lo que primero deberemos obtener el valor de p y se obtiene observando que nuestra ecuación

$(x-3\ )^2 = 8(y+1)$ de donde por semejanza sabemos que 8=4p, por lo que despejando queda que p=2 (p también es la distancia que hay del vértice al foco)

La directriz es una recta perpendicular al eje focal, que se define como y=k-p

K=-1 y p=2 por lo tanto, Y=-1-2 entonces y**=-3, recta que define la directriz**

El foco está dado por la coordenada F (h, k+p) por lo tanto solo sustituimos los valores de (h, k) y p definidos anteriormente, es decir: F (3, (-1+2)) por lo que el foco está dado por la coordenada F (3,1) al graficar se puede observar que los elementos calculados de la parábola dada corresponden a lo que se obtiene gráficamente como puede observarse



Te invitamos a revisar el siguiente **QR**, donde podrás tener información adicional

Observa cada uno de los ejemplos que se desarrollan y observa cómo se obtiene la ecuación de la parábola en cada caso.

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la parábola y los elementos que se te solicitan, cuyo vértice está en el origen y su foco en $F(3,0)$

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la derecha con foco $F(a,0)$ y tiene la forma:

Ecuación	Foco	Directriz
$y^2 = 4ax$	$(a,0)$	$x = -a$

a) El parámetro $a = 3$

b) Su ecuación $y^2 = 4(3)x$ $\quad y^2 = 12x$

c) Su directriz está en $x = -(3)$ $\quad x = -3$

d) La longitud del lado recto LR $\quad LR = |4(3)|$ $\quad LR = 12$

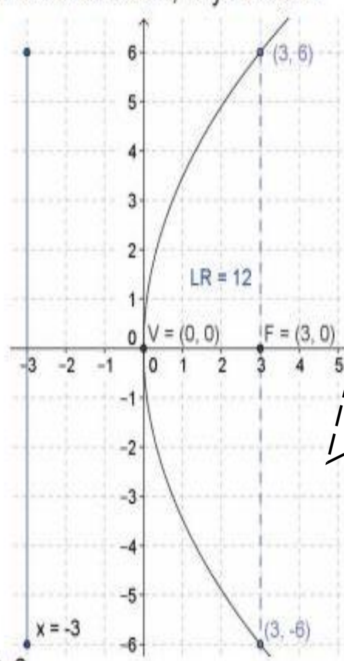
e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.

Se toma el valor de la abscisa del foco, es decir, $x = 3$

$y^2 = 4ax \quad y^2 = 4(3)(3) \quad y^2 = 36 \quad y = \pm\sqrt{36} \quad y = \pm 6$

Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (3,6) y (3,-6)

f) Su gráfica



Las coordenadas del vértice y foco están dadas de la coordenada F(3,0) se define entonces que a=3 por lo que la directriz será x=-a, por lo tanto directriz es la recta X=-3 , el lado recto se obtiene con la formula LR=|4a| entonces LR=|4(3)|=12, el lado recto siempre pasa por el foco por lo que se toma el valor de la abscisa que en este caso es el parámetro a=3 los valores de y se obtienen al sustituir en la ecuación y^2=4aX, es decir:

$$y^2 = 4 * 3 * 3$$

$$y^2 = 36$$

Por lo que se define que las coordenadas del lado recto son (3,6) y (3,-6)

Ejemplo 2

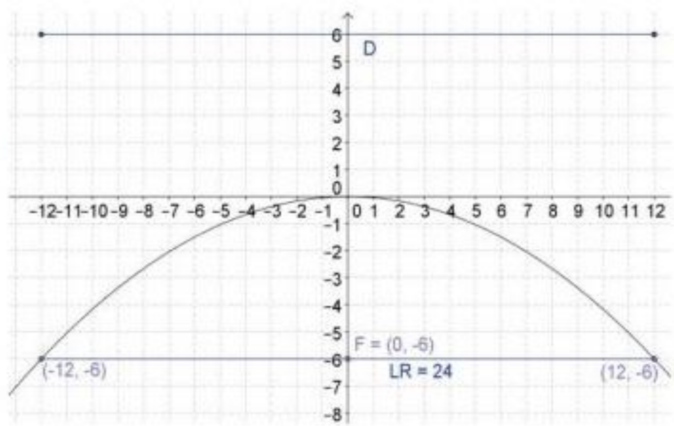
Encuentra la ecuación de la parábola y los elementos que se te solicitan, cuyo vértice está en el origen y su foco en F(0,-6)

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la abajo con foco $F(0,-a)$ y tiene la forma:

Ecuación	Foco	Directriz
$x^2 = -4ay$	$(0,-a)$	$y = a$

a) El parámetro $a = 6$
b) Su ecuación $x^2 = -4(6)y$ $\quad x^2 = -24y$
c) Su directriz está en $y = 6$ $\quad y = 6$
d) La longitud del lado recto LR
$LR = |4(-6)|$ $\quad LR = |-24|$ $\quad LR = 24$
e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto:
Se toma el valor de la ordenada del foco, es decir, y = 6
$x^2 = -4ay$ $\quad x^2 = -4(-6)(6)$
$x^2 = 144$ $\quad x = \pm\sqrt{144}$ $\quad x = \pm 12$
Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son:
(12,-6) y (-12,-6)
f) Su gráfica



Observa la explicación dada, verifica que los datos que se asignan a cada parámetro son correctos e identifica en la gráfica el vértice, el foco, la directriz, la longitud y las coordenadas del lado recto.

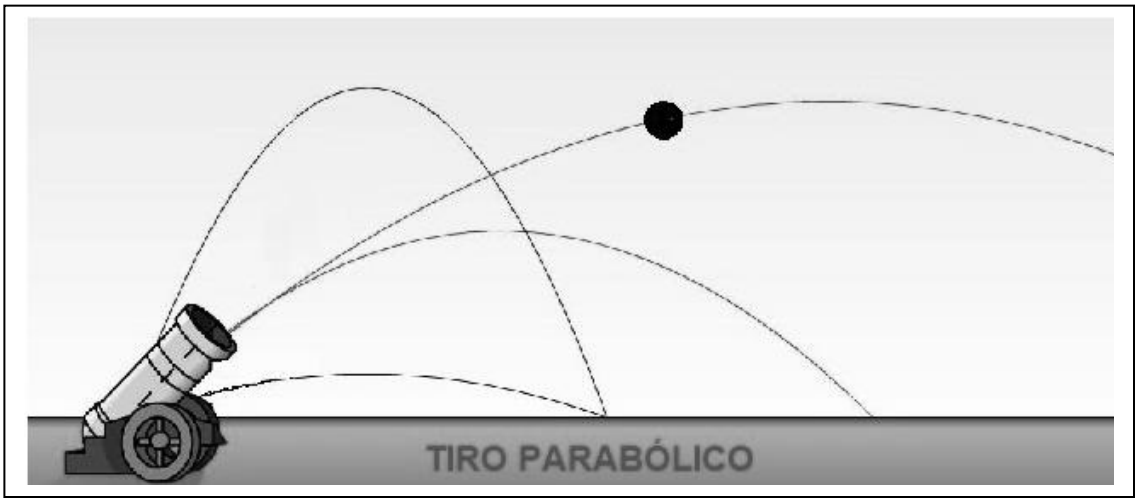
Tiro parabólico.

El tiro parabólico es el movimiento que describe un objeto que se lanza con un ángulo respecto a la horizontal. Se caracteriza por una trayectoria curva en forma de parábola.

Los proyectiles son objetos lanzados que **están sujetos solo al efecto de la gravedad**, lo que significa que el objeto se mueve horizontal y verticalmente simultáneamente.

El resultado de una fuerza vertical que actúa sobre un objeto en movimiento horizontal es hacer que el objeto se desvíe de su trayectoria lineal.

Este tipo de movimiento se llama **movimiento o tiro parabólico**.



Consulta el siguiente QR para tu apoyo

Características del Tiro Parabólico.
El movimiento del proyectil **se divide en dos movimientos, horizontal y vertical, y** son completamente independientes entre sí.

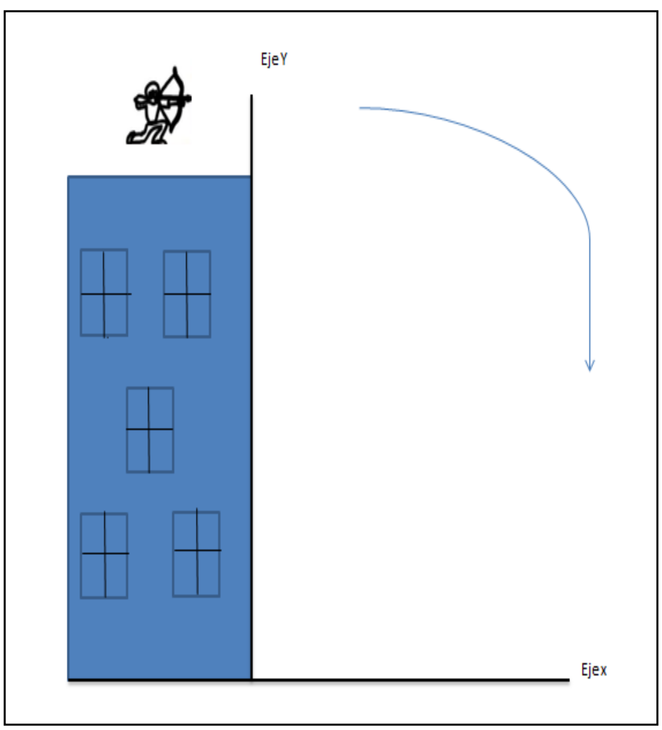
- En el movimiento horizontal, el proyectil se mueve a una velocidad constante, como en el **movimiento rectilíneo uniforme (MRU).**
- En el movimiento vertical, el objeto se mueve de acuerdo con la aceleración gravitacional y por lo tanto, actúa como un cuerpo en caída libre**,** o lo que es lo mismo, con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA).
- No se tiene en cuenta el rozamiento del aire, de lo contrario no sería MRUA.
- La velocidad en el eje X es constante, mientras que la velocidad en el eje Y es variable.

Aplicaciones del tiro parabólico.

- En balística, se utiliza para determinar la trayectoria de una bala.
- En los videojuegos, se utiliza para el salto de personajes y el lanzamiento de proyectiles.
- En el deporte, se utiliza en el fútbol americano, el vóleibol y el fútbol soccer.
- En la vida cotidiana, se puede observar al patear un balón o ver cómo los carros saltan una rampa.

Consulta el siguiente QR para tu apoyo

Explicamos una aplicación del tiro parabólico.
Un arquero que se encuentra en la cima de una torre dispara una flecha horizontalmente a una velocidad de 175 m/s. Si la altura de la cual se dispara es de 115 mts. Calcula el tiempo que tarda en caer y la distancia a la que llegará la flecha.
Datos:



Datos:
La flecha se dispara horizontalmente con una velocidad de 175 m/s por tanto
$V_ix=175$ m/s
La velocidad inicial en y será cero, por tanto
$V_iy=0$
La altura de la cual se dispara la flecha es de 115 m es decir
$y_i=115$ mts.
La aceleración gravitacional se tomará negativa por que la flecha cae (va hacia abajo)
$A=g=-9.8$ m/s^2
El movimiento horizontal es un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) es decir:
$V_x=d/t$
El movimiento vertical es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) es decir utiliza las siguientes formulas:
$\boldsymbol{y_{f}=y_{i}+v_{i}y\,t+\frac{1}{2}at^2}$ Se utiliza esta fórmula ya que tiene los datos conocidos, desarrollando:

De los datos dados en el problema sabemos que

y_f=0

V_iy=0

yi=115

a=-9.8

Al sustituir en la fórmula: $\boldsymbol{y_{f=}y_{i+}v_i y\; t + \frac{1}{2}at^2}$

Queda:

0=115+(0)(t)+ $\frac{1}{2}(-9.8)t^2$ despejando a t:

$$\boldsymbol{t = \pm\sqrt{(\frac{-2y_i}{a})}}$$

Sustituyendo:

$$t = \pm\sqrt{(\frac{-2(115)}{-9.8})}$$

El tiempo no puede ser negativo por lo tanto solo se considera el resultado positivo dela raíz, quedando:

t=4.84 s

De la fórmula:

$V_x = \frac{d}{t}$ Despejando d=V_xt por tanto, de los datos sabemos que $V_{x=}$ 175m/s y el tiempo t se obtuvo en el paso anterior entonces d=(175m/s) (4.84s) =847.79 metros.

La flecha tarda en caer 4.84 segundos y llega o recorre una distancia de 848 metros.

Elaboramos

Actividad.

Instrucciones: Formando equipos de máximo 4 integrantes resuelve el siguiente problema, debiendo plantear las ecuaciones correspondientes.

Un avión que vuela horizontalmente a 500 mi/h suelta un paquete. Al cabo de 4 segundos el paquete llega al suelo.

¿Cuál es la altitud del avión?

¿Cuál fue el alcance horizontal del paquete?

Plantea los datos aquí y resuelve:

Para ayudarte a resolverlo consulta el siguiente **QR**

Evaluamos

Instrucciones: Lee detenidamente cada pregunta y selecciona la respuesta correcta de acuerdo a los conocimientos adquiridos y compara resultados con tus compañeros.

1.-Es el punto de la parábola que está más cercano tanto al foco como a la directriz

a) Foco b) Directriz c) Vértice

2.- Es el segmento que une dos puntos de la parábola, pasa por el foco y es perpendicular al eje focal.

a) Directriz b) Eje focal c) Lado recto

3.- ¿Cuál es la ecuación de la parábola con vértice en el origen que abre a la derecha?

a) $y^2 = -4Px$ b) $x^2 = 4Py$ c) $y^2 = 4Px$

4.- ¿Cuál es la ecuación de la parábola si su vértice está en el origen V(0,0) y el foco en la coordenada F(5,0)

a) $y^2 = 20x$ b) $y^2 = -20x$ c) $x^2 = 20y$

5.- ¿Cuál es la fórmula para obtener la longitud del lado recto?

a) LR=| 4a| b) LR=| 4f | c) LR= |-4a|

6.- ¿Cuál es la longitud del lado recto si el foco está en la coordenada F (5,0) y el vértice en el origen?

a) -20 b) 20 c) 15

7.- Si se conoce la siguiente ecuación de una parábola: $(\boldsymbol{x-3})^2 = \boldsymbol{4(y-1)}$ **¿cuál es el la coordenada del vértice?**

a) V (3,1) b) V (3,-1) c) V (-3,-1)

8.-Si se conoce la siguiente ecuación de una parábola: $(\boldsymbol{x-2})^2 = \boldsymbol{8(y-3)}$ **¿cuál es el la coordenada del vértice?**

a) V (-2,-3) b) V (2,3) c) V (2,-3)

9.-Si se conoce la siguiente ecuación de una parábola: $(\boldsymbol{x+5})^2 = \boldsymbol{6(y+2)}$ **¿cuál es el la coordenada del vértice?**

a) V (-5,-2) b) V (5,2) c) V (-5,2)

10.-La siguiente ecuación de la parábola $\boldsymbol{y^2 = -6x}$

a) Es horizontal abre a la izquierda
b) Es horizontal abre a la derecha
c) Es una parábola inclinada

11.- La ecuación $x^2 = -6y$ define una parábola:

a) Es vertical abre a la izquierda
b) Es vertical abre a la derecha
c) Es horizontal con vértice en el origen

Progresión 6

Analiza el movimiento circular utilizando la ecuación de la circunferencia, medidas angulares y pensamiento variacional. Se consideran las implicaciones físicas de la conservación del momento angular.

Meta de aprendizaje	Categoría
C2M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento.
Subcategoría	**Contenido**
S2. Pensamiento intuitivo. **S3.** Pensamiento formal.	**1.-** Propiedades de la circunferencia. **2.-** Ecuaciones de la circunferencia. **3.-** Problemas de aplicación.

Enganchamos

Circunferencia.

¿Sabías que?

El matemático griego Eratóstenes de Cirene fue el primero en calcular la circunferencia de la Tierra en el 230 a. C.

- Clavó un palo en el suelo en Alejandría el 21 de junio.
- Midió la sombra que proyectaba el sol en el cenit.
- Calculó el ángulo de incidencia del Sol, que resultó ser de 7,2 grados.
- Estimó la distancia hasta Siena (unos 5.000 estadios, un poco más de 800 km).

Con este modelo de Tierra se podía calcular muy fácilmente su radio por una simple proporción.

<u>Conclusión</u>

Eratóstenes fue el primer hombre en medir el tamaño de la Tierra con precisión. Su experimento demostró la esfericidad de la Tierra hace más de 2.000 años.

Exploramos

Propiedades de la circunferencia.

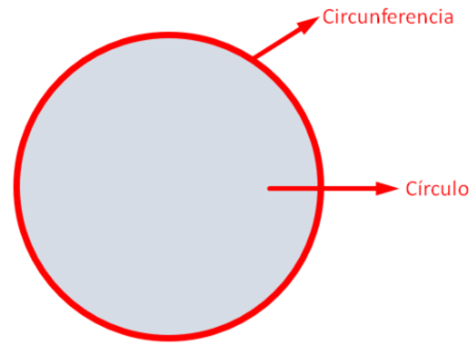
¿Qué es una circunferencia?

La circunferencia es una figura geométrica plana y cerrada que se caracteriza porque todos los puntos que la conforman se encuentran a la misma distancia del centro. Dicha distancia permanente se denomina radio.

Imagina que tienes un hilo de coser en línea recta, y que tomas los dos extremos y los juntas entre sí, pero formando una línea curva que dibuja un círculo perfecto. Esa línea se llama circunferencia. Lo especial de esta línea es que todos los puntos que la forman están exactamente a la misma distancia de un punto central, conocido como el centro. A esta distancia constante la llamamos radio.

Es importante no confundirla con el círculo. El círculo se refiere al espacio plano y todo lo que está dentro de la circunferencia, mientras que la circunferencia es solo la línea curva que delimita ese espacio.

De manera más simple, puedes pensar en ella como el borde que rodea al círculo

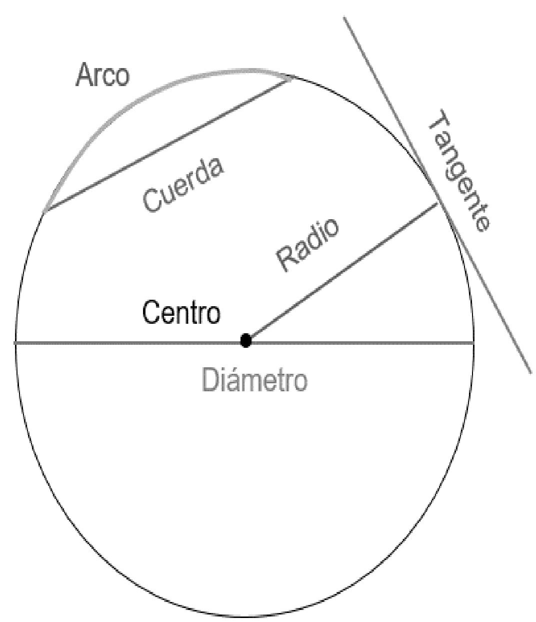


Explicamos

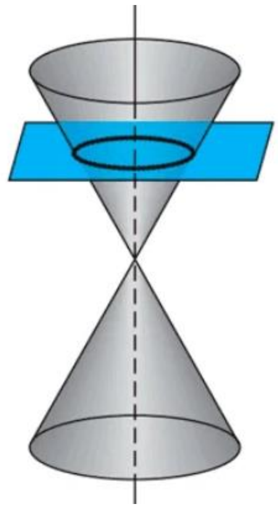
Elementos de una circunferencia.

¿Cuáles son las partes de una circunferencia?

La circunferencia tiene algunos elementos básicos que la forman:

Centro: es el punto equidistante de todos los puntos de la circunferencia. **Radio**: Es un segmento que une el centro con un punto de la circunferencia. **Diámetro**: Es una cuerda que pasa por el centro. Su longitud es el doble que la del radio. **Cuerda**: Es cualquier segmento de la recta cuyos extremos son puntos que pertenecen a la circunferencia. **Arco**: Es la parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos. **Tangente**: Es la recta que toca en un solo punto a la circunferencia.	

La circunferencia también puede definirse como una sección cónica, la cual resulta de cortar un cono circular recto con un plano perpendicular a su eje.



Ecuaciones de la circunferencia.

Forma ordinaria.

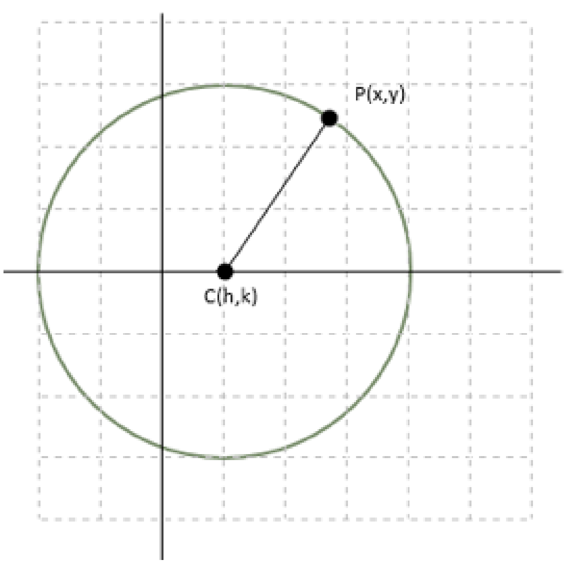
¿Cómo obtenemos la ecuación de la circunferencia?

Anteriormente en (Pensamiento Matemático II) habíamos visto como obtener la distancia entre dos puntos:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, ahora observa la siguiente figura:

En esta progresión aprenderás a:

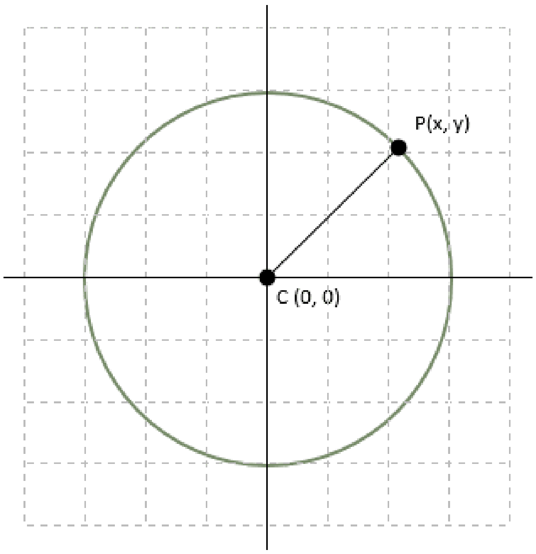
- Graficar y escribir ecuaciones de la circunferencia.
- Aplicar las ecuaciones de la circunferencia en situaciones de la vida real.



Analizando la imagen nos damos cuenta que la distancia entre el punto C (h, k) y P(x, y) es el radio de la circunferencia, por lo que $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$, elevamos al cuadrado ambos miembros y obtenemos $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$ y obtenemos la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria: $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})^2 = \boldsymbol{r}^2$

Forma canónica.

Hay un caso particular de la circunferencia, que tiene su centro en el origen. La ecuación que la define se llama *ecuación canónica* de la circunferencia.

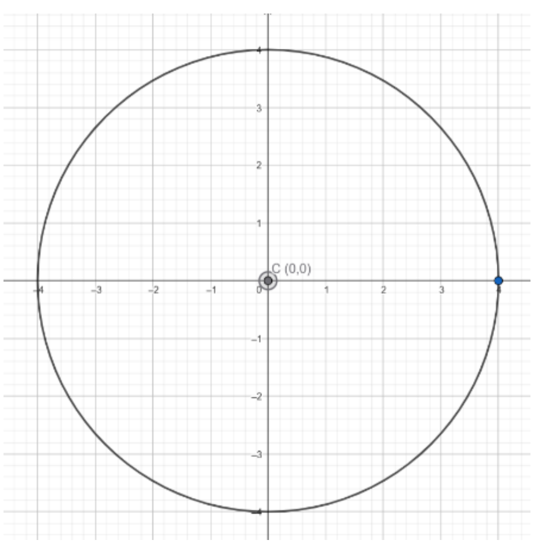


En la figura observamos que el radio es la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia,

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, con los datos de la imagen tenemos: $r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$ = $r = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$, elevamos al cuadrado ambos términos: $r^2 = x^2 + y^2$, obtenemos la ecuación de la circunferencia con centro en el origen: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$

Elaboramos

Ejemplo 1.- Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en origen y radio de 4.

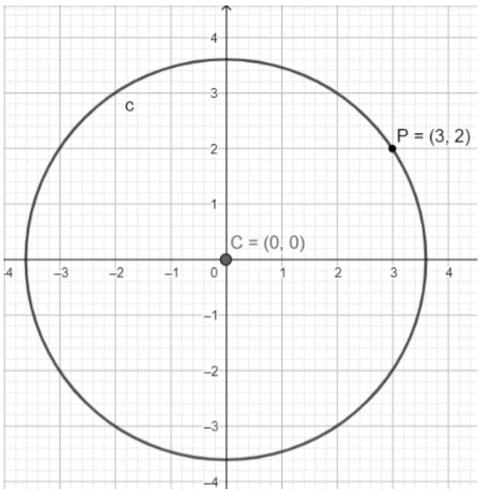


Como el centro de la circunferencia se encuentra en el origen C (0,0) y r = 4

La ecuación de la circunferencia es

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 16}$

Ejemplo 2.- Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en origen.



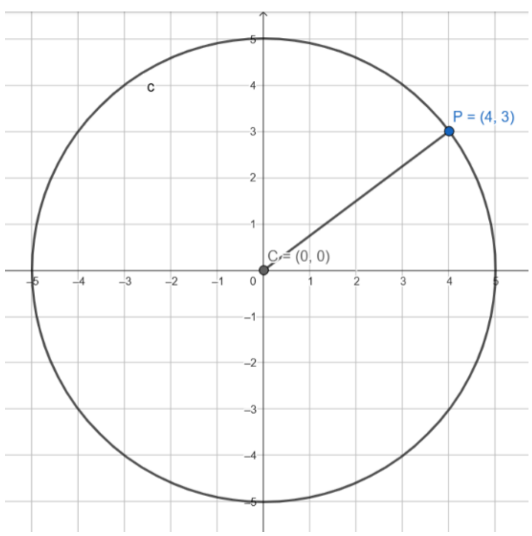
Como el centro de la circunferencia se encuentra en el origen utilizaremos la forma canónica: $x^2 + y^2 = r^2$

Se sustituyen los valores del punto $P(x, y) \rightarrow P(3,2)$, para encontrar el valor del radio:

$(3)^2 + (2)^2 = r^2$ $\qquad 9 + 4 = r^2$ $\qquad r = \sqrt{13}$

Con lo anterior obtenemos que la ecuación de la circunferencia es: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 13}$

Ejemplo 3.- Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en el origen que pasa por el punto P de coordenadas (4, 3).



Dado que la circunferencia pasa por el punto de coordenadas (4, 3), las coordenadas de este punto satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$

Al sustituir las coordenadas de este punto en la ecuación, se obtiene el valor del radio de la circunferencia.

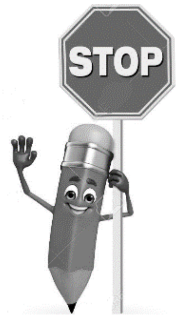
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$4^2 + 3^2 = r^2$$
$$16 + 9 = r^2$$
$$25 = r^2$$
$$\sqrt{25} = r$$
$$5 = r$$

Por lo tanto, el radio de la circunferencia que pasa por el punto P de coordenadas (4, 3) es r = 5.

Ahora, al sustituir este valor en la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, se obtiene la **ecuación de la circunferencia:**

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 25}$$

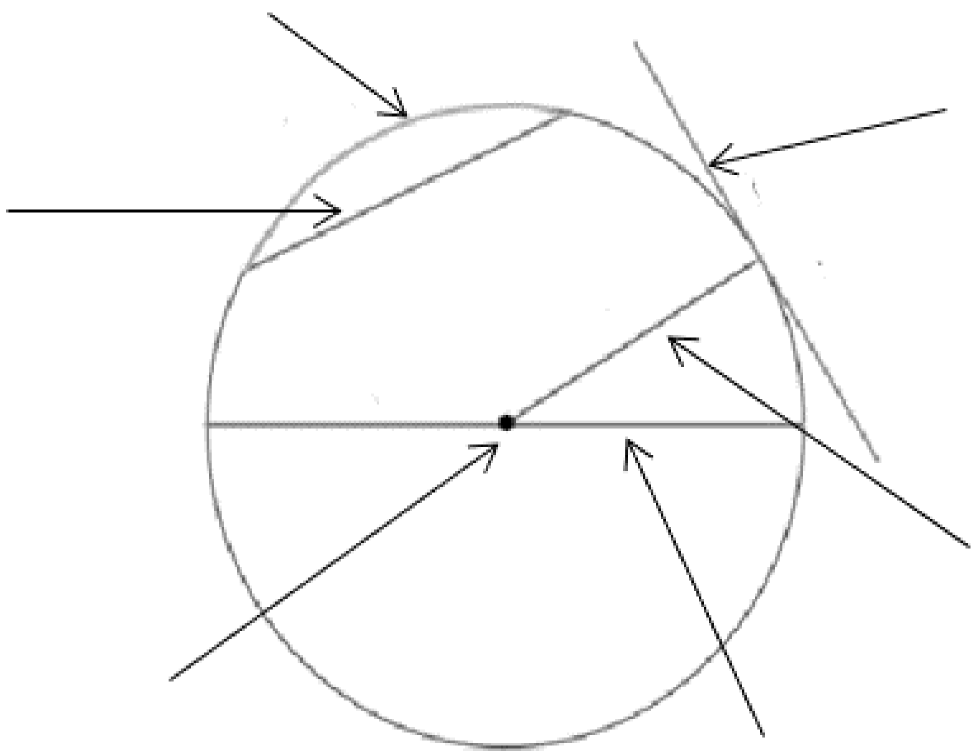
Evaluamos



Es momento de hacer una pausa y evaluar nuestro conocimiento hasta el momento del tema de circunferencia.

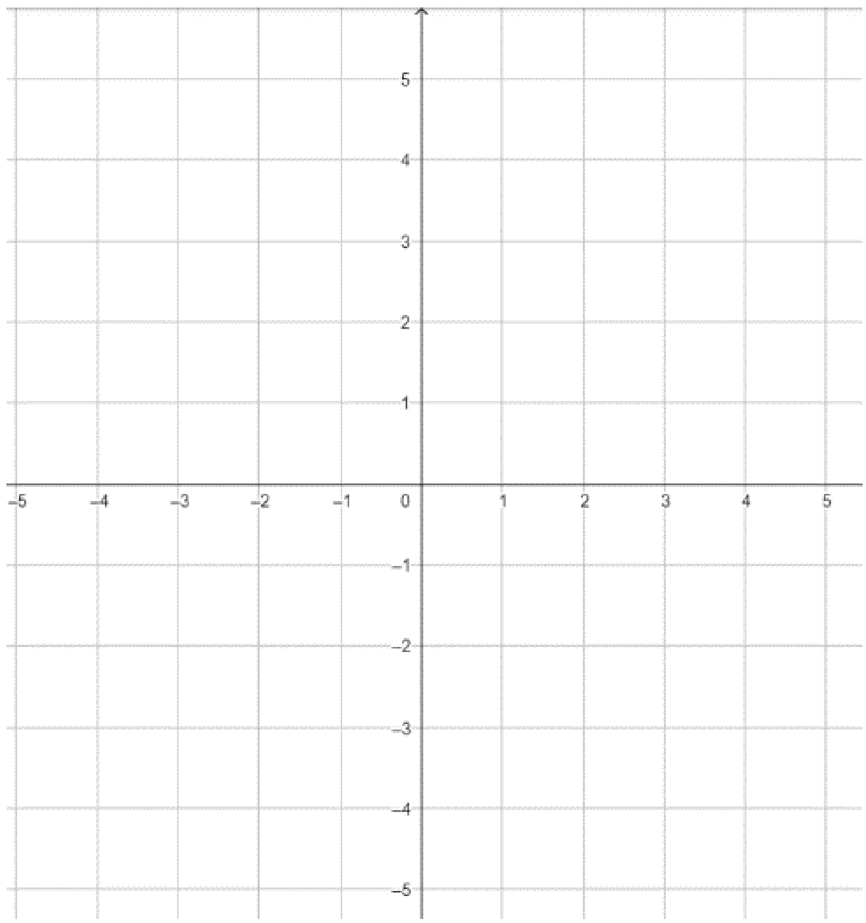
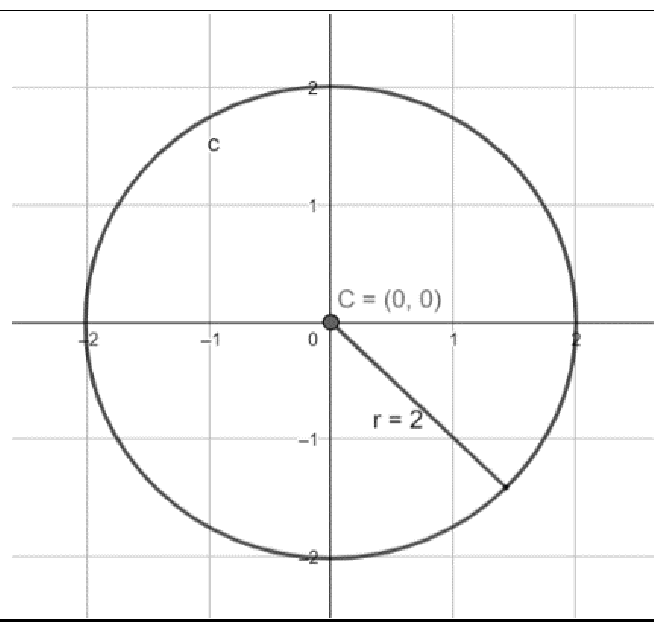
Ejercicio 1. Identifica los elementos de la circunferencia.

Instrucción 1.- Escribe el nombre a cada parte de la circunferencia.

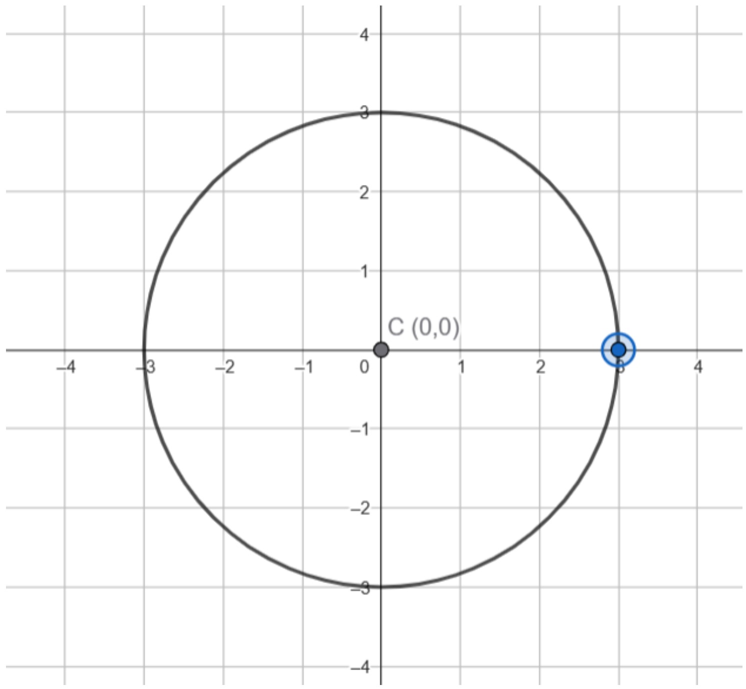


Instrucción 2.- Relaciona ambas columnas, escribe dentro del paréntesis la letra que corresponde.

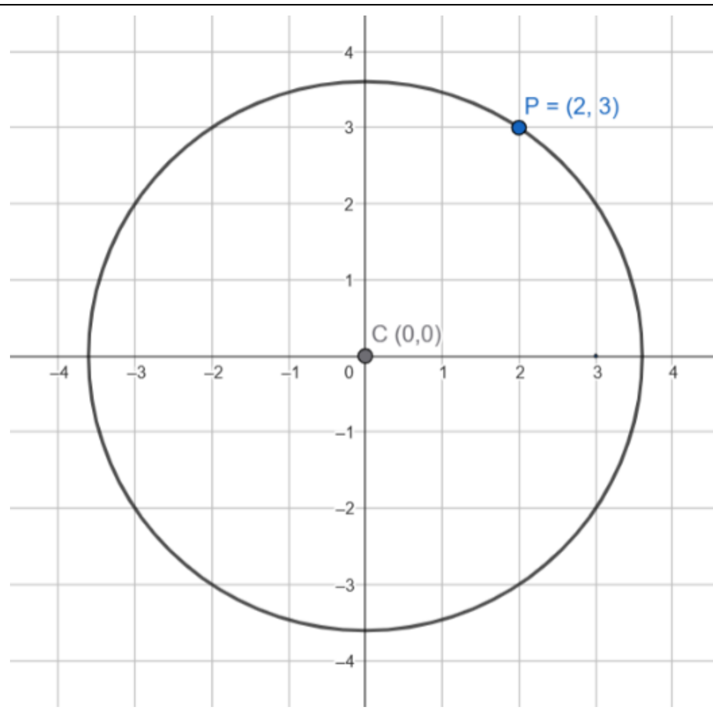
A. Es la recta que toca en un solo punto a la circunferencia.	( ) Diámetro
B. Es la parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos.	( ) Arco
C. Es una cuerda que pasa por el centro. Su longitud es el doble que la del radio.	( ) Radio
D. Es cualquier segmento de la recta cuyos extremos son puntos que pertenecen a la circunferencia.	( ) Tangente
E. Es un segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.	( ) Cuerda

Ejercicio 2. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio = 4;   no olvides graficar.

Ejercicio 3. Encuentra la ecuación de la siguiente circunferencia:


Ejercicio 5. Encuentra la ecuación de la siguiente circunferencia:



Ejercicio 6. Encuentra la ecuación de la siguiente circunferencia:



Hasta el momento conocemos la ecuación de la circunferencia con centro el origen, pero ¿qué pasa cuando el centro está fuera de él? Veamos la ecuación de la circunferencia en su forma general.

Explicamos

Forma general.

Nuestra ecuación ordinaria es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, ahora vamos a desarrollarla: $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2-r^2=0$

Ordenando obtenemos:

$x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+(h^2+k^2-r^2)=0$

Se reemplaza:

$$-2h=D$$

$$-2k=E$$

$h^2+k^2-r^2=F$

Nuestra ecuación anterior se convierte:

$\boldsymbol{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$ $\longrightarrow$ Ecuación en su forma general

Con lo anterior se deduce:

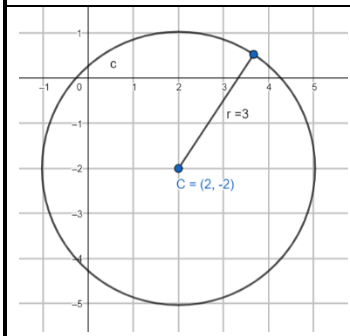
$D=-2h \rightarrow h=-\frac{D}{2}$

$E=-2k \rightarrow k=-\frac{E}{2}$

$Centro\text{: } \left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$

$Radio=r=\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F}$

Ejemplo 1.- Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en C (2,-2) y radio r = 3



El centro de la circunferencia está fuera del origen, por lo que utilizaremos la forma ordinaria: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Como sabemos C(h, k), sustituimos valores $h=2$, $k=-2 \ \ y \ \ r = 3$

$(x-2)^2+(y-(-2))^2=(3)^2$

$(x-2)^2+(y+2)^2=9 \longleftarrow$ Forma ordinaria

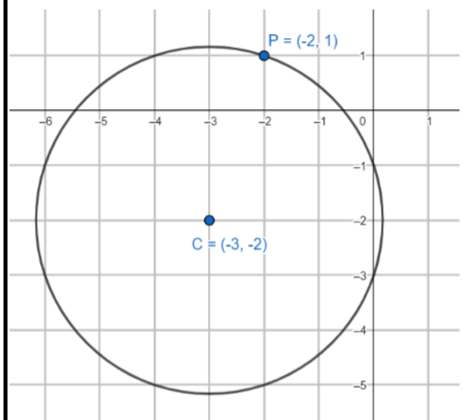
Desarrollamos binomios y simplificamos

$x^2-4x+4+y^2+4y+4=9$

$x^2+y^2-4x+4y+4+4-9=0 \longrightarrow x^2+y^2-4x+4y-1=0 \longleftarrow$ Forma general

Ejemplo 2.- Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto P (-2,1) con centro en C(-3,-2)

Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto P (-2,1) con centro en C(-3,-2)



Observando la figura nos damos cuenta que la distancia entre el centro C y el punto P es el radio. Utilizaremos la fórmula de distancia entre dos puntos para encontrarlo.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(-2 - (-3))^2 + (1 - (-2))^2}$$

$$r = \sqrt{(-2 + 3)^2 + (1 + 2)^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (3)^2}$$

$$r = \sqrt{1 + 9}$$

$$r = \sqrt{10}$$

Empezamos a sustituir, recuerda que $C = (h, k) \ \rightarrow \ C = (\overset{h}{-3}, \overset{k}{-2})$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - (-3))^2 + (y - (-2))^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$$

$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 10$ $\longleftarrow$ Forma ordinaria

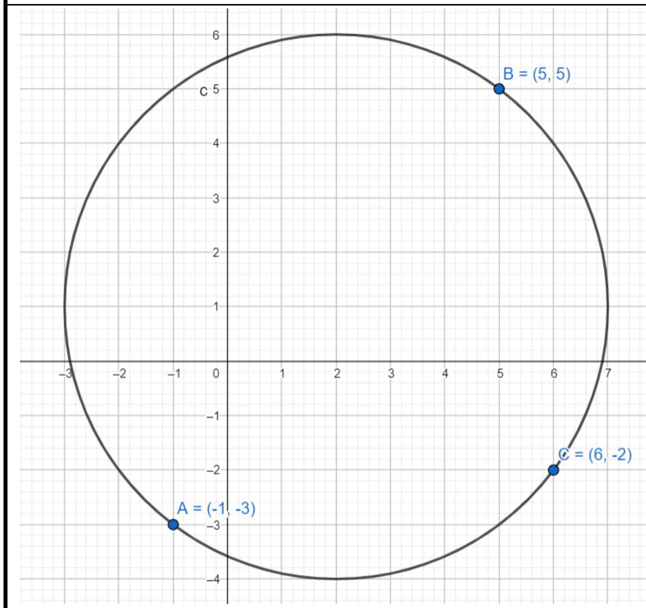
Desarrollamos binomios y simplificamos

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 10$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 + 4 - 10 = 0$$

$x^2 + y^2 + 6x + 4y + 3 = 0$ $\longleftarrow$ Forma general

Ejemplo 3.- Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (-1, -3), B (5, 5) y C (6,-2)



Sustituimos los valores de cada punto en la ecuación general de la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$Punto\ A = (\overset{x}{-1}, \overset{y}{-3})$

$(-1)^2 + (-3)^2 + D(-1) + E(-3) + F = 0$

$1 + 9 - D - 3E + F = 0$

$-D - 3E + F = -10$ Ec.1

$Punto\ B = (\overset{x}{5}, \overset{y}{5})$

$Punto\ C = (\overset{x}{6}, \overset{y}{-2})$

$(5)^2 + (5)^2 + D(5) + E(5) + F = 0$

$25 + 25 + 5D + 5E + F = 0$

$5D + 5E + F = -50$ Ec. 2

$(6)^2 + (-2)^2 + D(6) + E(-2) + F = 0$

$36 + 4 + 6D - 2E + F = 0$

$6D - 2E + F = -40$ Ec. 3

Formamos un Sistema de tres ecuaciones con tres variables.

Ec. 1 $-D - 3E + F = -10$

Ec. 2 $5D + 5E + F = -50$

Ec. 3 $6D - 2E + F = -40$

Resolvemos por el método de suma y resta

Tomamos la ecuación 1 y 2 y eliminamos F

Ec. 1 $-D - 3E + F = -10$

Ec. 2 $5D + 5E + F = -50$ (-1)

$-D - 3E + F = -10$

$-5D - 5E - F = 50$

$-6D - 8E = 40$ Ec. 4

Tomamos la ecuación 1 y 3 y eliminamos F

Ec. 1 $-D - 3E + F = -10$

Ec. 3 $6D - 2E + F = -40$ (-1)

$-D - 3E + F = -10$

$-6D + 2E - F = 40$

$-7D - E = 30$ Ec. 5

Tomamos las ecuaciones 4 y 5 y eliminamos E

Ec. 4 $\quad -6D - 8E = 40$

Ec. 5 $\quad -7D - E = 30 \quad (-8)$

$$-6D - 8E = 40$$

$$56D + 8E = -240$$

$$50D = -200$$

$$D = \frac{-200}{50}$$

$$D = -4$$

Sustituimos el valor de D en la Ec. 4 o 5

Ec. 4 $\quad -6D - 8E = 40$

$$-6(-4) - 8E = 40$$

$$24 - 8E = 40$$

$$-8E = 40 - 24$$

$$-8E = 16$$

$$E = \frac{16}{-8}$$

$$E = -2$$

Sustituimos los valores de D y E en la ecuación 1, 2 o 3, en cualquiera de las 3

Sustitución en la ecuación 1

Ec. 1 $\quad -D - 3E + F = -10$

$$-(-4) - 3(-2) + F = -10$$

$$4 + 6 + F = -10$$

$$10 + F = -10$$

$$F = -10 - 10$$

$$F = -20$$

Sustituimos los valores de D, E y F en la forma general: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

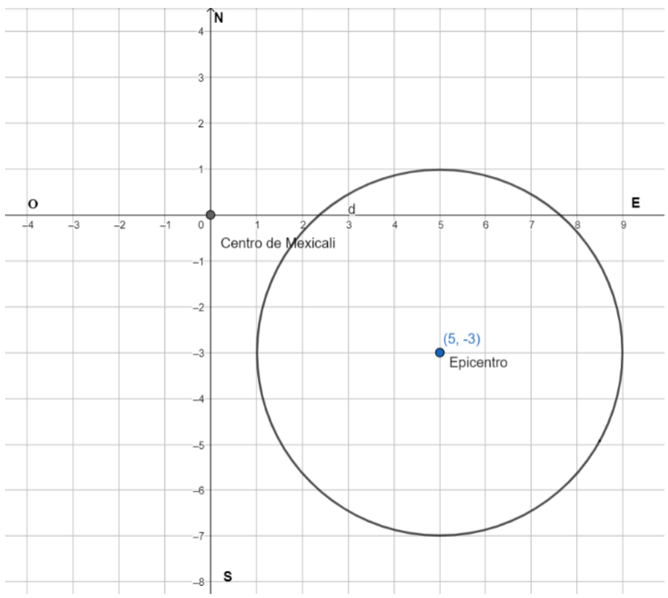
$$x^2 + y^2 + (-4)x + (-2)y + (-20) = 0$$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0 \longleftarrow$ Forma General

Para mayor comprensión del tema,

da clic en el siguiente código

Ejemplo 4.- Un servicio sismológico de Baja California detectó un sismo con origen en la Ciudad de Mexicali a 5km al este y 3km al sur del centro de la Ciudad, un radio de 4km a la redonda, ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia del área afectada? Utilizando esta ecuación indica si afectó al centro de la Ciudad de Mexicali.



A simple vista podemos apreciar que el sismo no afectó el centro de la Ciudad de Mexicali.

Ahora encontremos la ecuación de la circunferencia:

Epicentro $(\overset{h}{5}, \overset{k}{-3})$ r = 4

Recordemos que la forma ordinaria de la circunferencia es:

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^{2}+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{2}=\boldsymbol{r}^{2}$$

Sustituimos y tenemos $(x-5)^2+\big(y-(-3)\big)^2=(4)^2$

$(\boldsymbol{x}-\mathbf{5})^{2}+(\boldsymbol{y}+\mathbf{3})^{2}=\mathbf{16}$ **Ecuación de la circunferencia**

Como se nos pide que a través de la fórmula indiquemos si el temblor afectó el centro de la Ciudad de Mexicali, tenemos:

Mexicali $(\overset{x}{0}, \overset{y}{0})$

$(\boldsymbol{x}-\mathbf{5})^{2}+(\boldsymbol{y}+\mathbf{3})^{2}=\mathbf{16}$

$(\mathbf{0}-\mathbf{5})^{2}+(\mathbf{0}+\mathbf{3})^{2}$

$(-\mathbf{5})^{2}+(\mathbf{3})^{2}$

$\mathbf{25}+\mathbf{9}=\mathbf{34}$

$\mathbf{34}>\mathbf{16}$

Revisa el siguiente código

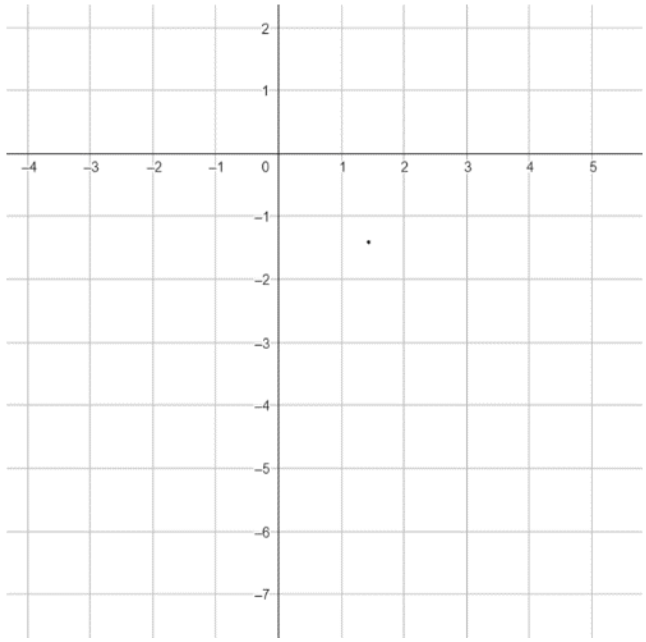
Esto significa que el punto está fuera de la circunferencia, por lo que el centro de Mexicali no fue afectado por el sismo.

Evaluamos

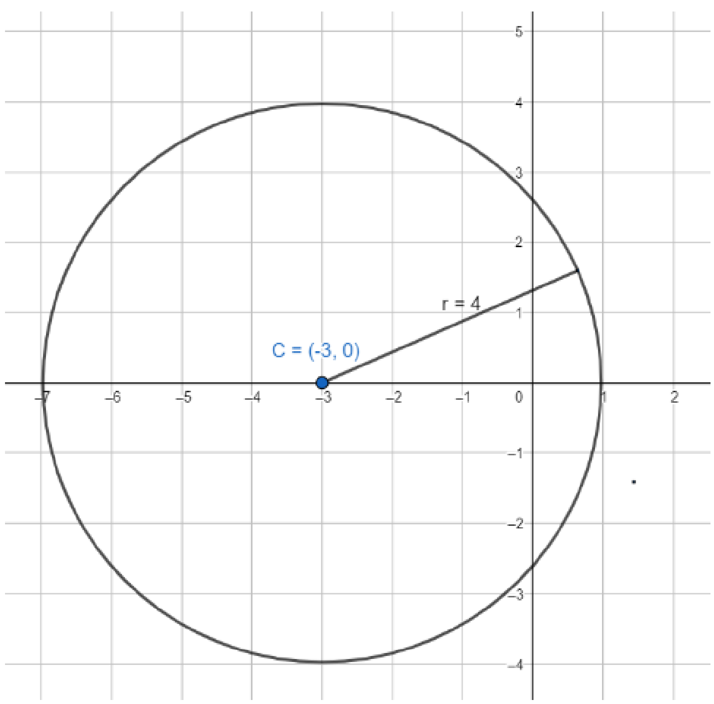
Es momento de evaluar nuevamente nuestro conocimiento acerca de la ecuación de la circunferencia.

Núm.	Radio	Centro	Ecuación
1	$r = 7$	(0,3)	
2	$r = 3$	(3,2)	
3	$r = \frac{5}{9}$	$(-\frac{2}{3}, -\frac{9}{5})$	
4	$r = 2$	$(0,0)$	
5			$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 144$
6			$(x+7)^2 + (y-5)^2 = 64$
7			$(x)^2 + (y+8)^2 = 16$
8			$(x-3)^2 + (y)^2 = 36$

1. **Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en C (1,-3) y radio r = 4**
   No olvides tu compás para graficar.



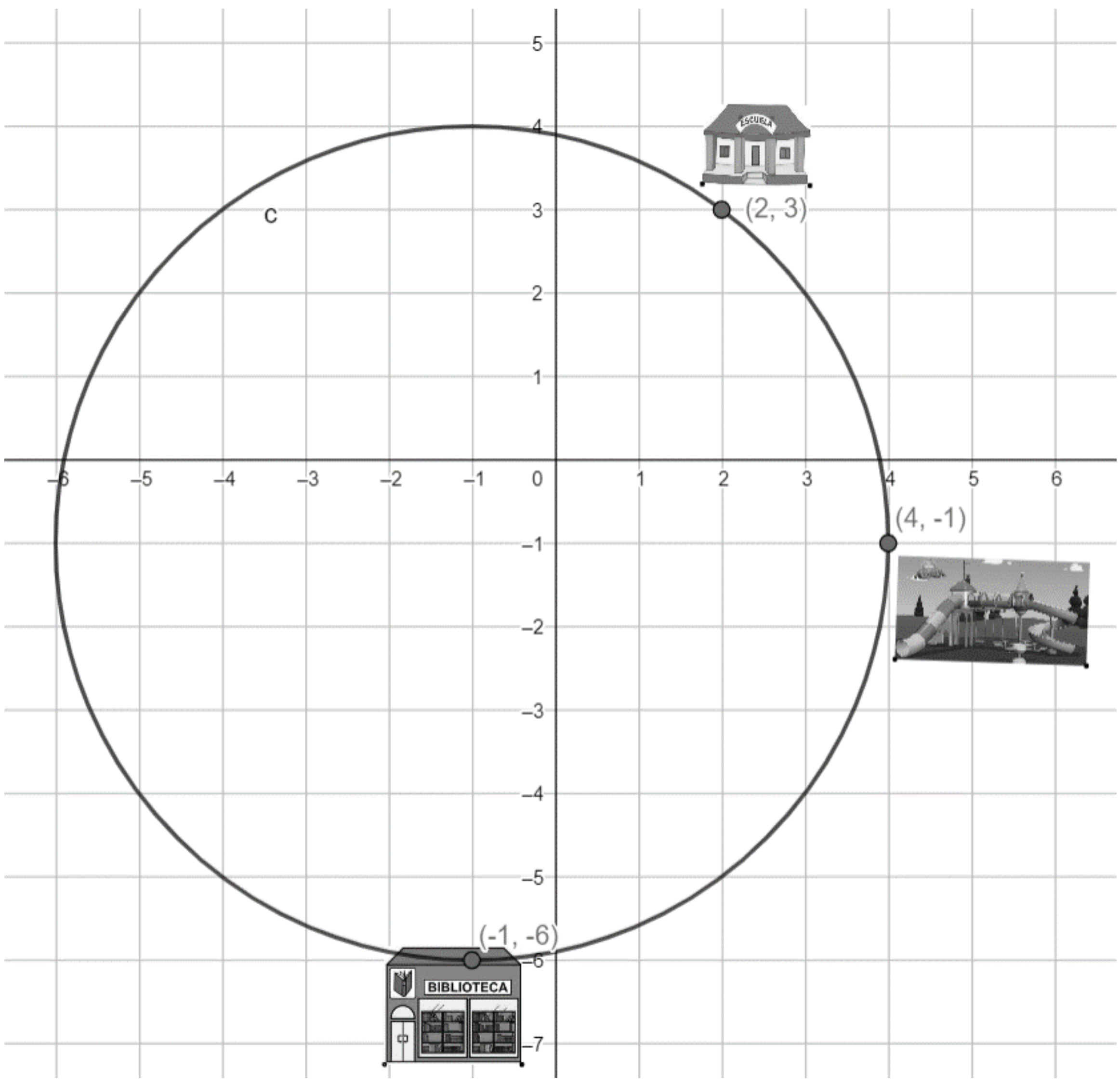
2. **Encuentra la ecuación de la siguiente circunferencia**



Problema de aplicación.

3.- Trabaja en parejas resolviendo el siguiente problema.

Se desea colocar una antena wifi, con alcance a la escuela (2,3), biblioteca (-1,-6) y al parque (4,-1), dicha antena debe colocarse en el punto medio de la circunferencia que se forma con los tres puntos. Encuentra su ecuación y el par ordenado donde se colocará la antena.



Progresión 7

Estudia el movimiento planetario utilizando las leyes de Kepler, pensamiento variacional, aspectos analíticos de la elipse y la coplanaridad de cuerpos que se mueven en el espacio.

Meta de aprendizaje	Categoría
C3M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	**C3.** Solución de problemas y modelación.
Subcategoría	**Contenido**
S1. Uso de modelos.	**1.-** Propiedades de la elipse. **2.-** Ecuación de la elipse con centro en el origen. **3.-** Problemas de aplicación. **4.-** Leyes de Kepler.

Enganchamos

Elipse.

¿Sabías que?

La tierra no es una esfera perfecta. Normalmente se representa a nuestro planeta como una esfera perfecta, pero esa no es su forma precisa. La tierra está achatada en los polos, por lo que su forma se asemeja más a un elipsoide que a una esfera.

Exploramos

Propiedades de la elipse.

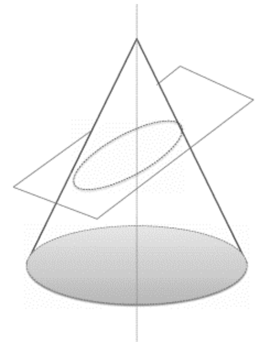
En progresiones anteriores estudiamos las distintas formas de expresar las secciones cónicas, como la circunferencia y parábola.

La figura elíptica se observa en diversas situaciones; la primera de ellas es en el universo, pues el Sistema Solar tiene un movimiento elíptico donde los planetas y las estrellas giran de esta forma alrededor del Sol.
La elipse o semielipse se utiliza también en construcciones arquitectónicas como en los siguientes ejemplos:

Estadio

Coliseo Romano

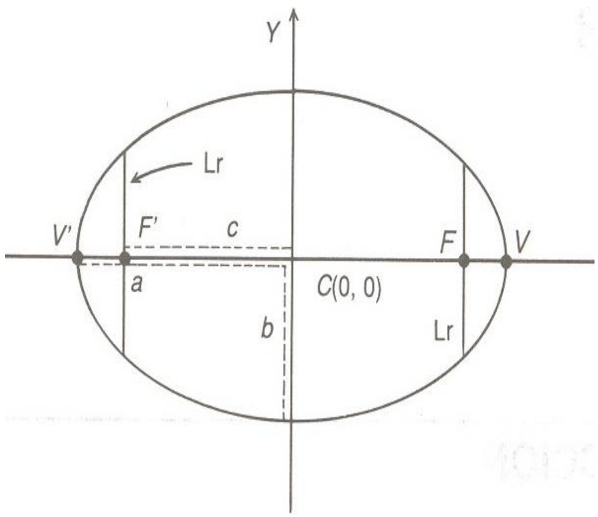
La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cartesiano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante y mayor que la distancia entre los focos.



Explicamos

Elementos de una elipse.

- **Vértice**: puntos de intersección de la elipse con su eje focal. Se representan con V y V'
- **Focos**: puntos fijos. Se representan con F y F'
- **Eje focal**: recta que pasa por los focos. Es la recta Ef.
- **Centro de la elipse**: punto medio del segmento de la recta cuyos puntos extremos son los vértices de la elipse. Se representa con C.
- **Eje mayor**: Segmento de la recta cuyos puntos extremos son los vértices de la elipse. Representado por $\overline{VV'}$= 2a
- **Eje menor**: segmento de la recta que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje focal. Representado por $\overline{BB'}$ = 2b
- **Lado recto**: segmento de recta perpendicular al eje focal y que pasa por uno de sus focos y cuyos puntos extremos están sobre la elipse. Existen dos lados rectos ya que hay dos focos. Están representados por $\overline{LR}$ y $\overline{L'R'}$

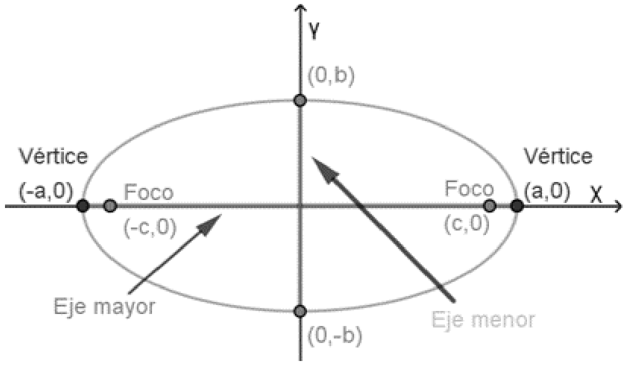


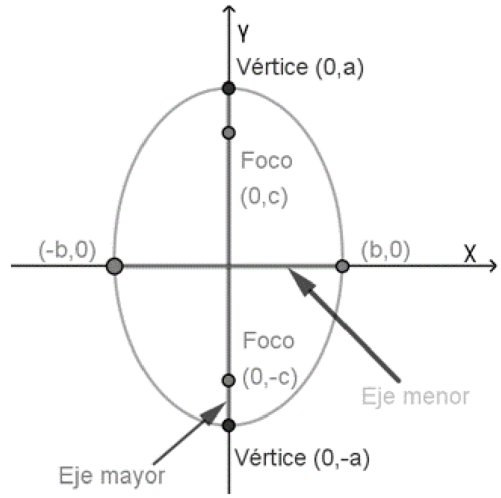
Vértices	V, V’
Focos	F, F’
Centro	C
Lado recto	Lr
Eje mayor	$\overline{VV}$’= 2a
Eje menor	2b
Eje focal	$\overline{F'F} = 2c$
	$\overline{F'C} = \overline{CF} = c$

Ecuación de la elipse con centro en el origen.

	Horizontal	**Vertical**
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad en\ donde:$ $a^2 > b^2 \quad y \quad c^2 = a^2 - b^2$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \quad en\ donde:$ $a^2 > b^2 \quad y \quad c^2 = a^2 - b^2$
Eje focal	**En el eje x**	**En el eje y**
Coordenadas de sus vértices	$V(a,0) \quad y \quad V'(-a,0)$	$V(0,a) \quad y \quad V'(0,-a)$
Coordenadas de los puntos extremos de su eje menor	$B(0,b) \quad y \quad B'(0,-b)$	$B(b,0) \quad y \quad B'(-b,0)$
Coordenadas de sus focos	$F(c,0) \quad y \quad F'(-c,0)$	$F(0,c) \quad y \quad F'(0,-c)$
Longitud de su eje mayor VV’ es	2a	2a
Longitud de su eje mayor BB’ es	2b	2b
Longitud del lado recto	$L=\frac{2b^2}{a}$	$L=\frac{2b^2}{a}$
Excentricidad	$e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{c}{a}$

Gráfica de la elipse con centro en el origen



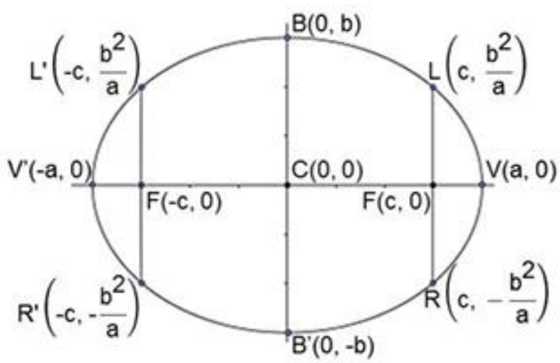


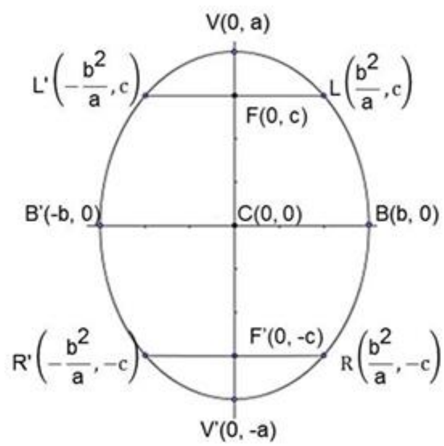
Eje mayor horizontal

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a>b$$

Eje mayor vertical

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad a>b$$





Características de la elipse con centro en el origen.

La forma **canónica** de la ecuación de la elipse con centro en (0,0), eje mayor y eje menor de longitud ***2a*** y ***2b*** respectivamente, con $a > b > 0$, es la siguiente:

Ecuación	Eje mayor	Vértices mayores	Vértices menores	Focos
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Horizontal	$V(\pm a, 0)$	$B(0, \pm b)$	$F(\pm c, 0)$
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	Vertical	$V(0, \pm a)$	$B(\pm b, 0)$	$F(0, \pm c)$

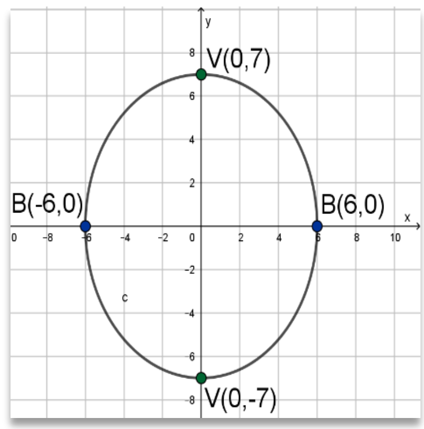
El foco de la elipse se encuentra sobre el eje mayor a **c** unidades del centro y se cumple la siguiente relación pitagórica: $\boldsymbol{c^2 = a^2 - b^2}$.

Ejemplo 1: Escribe la ecuación de la elipse

Escribe la ecuación de una elipse con centro en $(0,0)$ según las características que se dan.

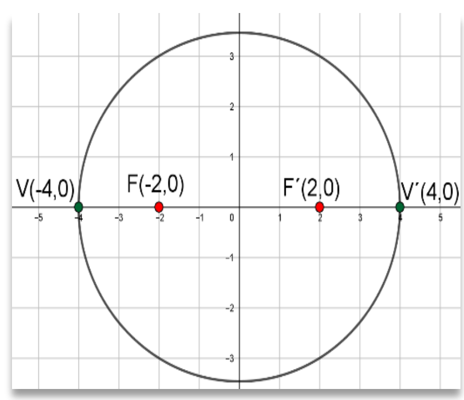
a. V (0,7) B (-6,0)

b. V (-4,0) F (2,0)



Solución del ejercicio a

a. El vértice V está sobre el eje Y, por los tanto, el eje mayor de la elipse es vertical con $a = 7$ y $b = 6$.
La ecuación es $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = \mathbf{1}$.



b. Los vértices y focos son puntos de una recta horizontal, entonces el eje mayor de la elipse es horizontal con $a = 4$ y $c = 2$. Para encontrar b, usa la ecuación
$c^2 = a^2 - b^2$.

$$2^2 = 4^2 - b^2$$
$$b^2 = 16 - 4 = 12$$
$$b = \sqrt{12}$$

La ecuación es $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Johannes Kepler (1571-1630) es recordado principalmente por haber descubierto las leyes que rigen el movimiento de los planetas. Calculó las tablas astronómicas más exactas conocidas hasta entonces, cuya precisión ayudó mucho a establecer la veracidad del sistema heliocéntrico. Kepler utilizó como sustento de sus leyes planetarias, las precisas y desgastadoras observaciones astronómicas que sobre Marte llevó a cabo Tycho Brahe (1546-1601).
La Primera Ley de Kepler dice: “La órbita de un planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de sus focos”.

Ejemplo 2. Grafica la siguiente elipse

Grafica la elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$. Identifica la posición de los focos.

Solución

Primero reescribe la ecuación en la forma canónica.

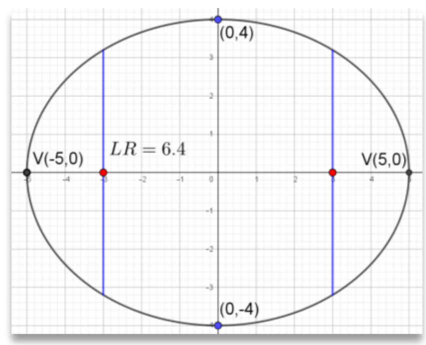
$$\frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400}$$ **Divide cada lado entre 400**

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Dado que el denominador del término x^2 es mayor que el de y^2 , el eje mayor es **horizontal**. Además $a = 5$ y $b = 4$. Estos valores servirán para ubicar la posición de los vértices.

Para calcular la longitud del lado recto utiliza la ecuación $LR = \frac{2b^2}{a}$.

$$LR = \frac{2(4)^2}{5} = \frac{32}{5} = 6.4$$



Los focos tienen coordenadas $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. Para encontrar el valor de c, usa la ecuación $c^2 = a^2 - b^2$.

$$c^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$c = \sqrt{9} = \pm 3$$

Las coordenadas de los focos son $F(3,0)$ y $F'(-3,0)$.

Para mayor comprensión del tema, da clic en el siguiente código.

Ejemplo 3. Encuentra la ecuación de la elipse.

Encuentra la ecuación de la elipse y todos sus elementos, cuyos vértices están en V (0,5) y V’ (0,-5) y sus focos en F (0,4) y F’ (0,-4)

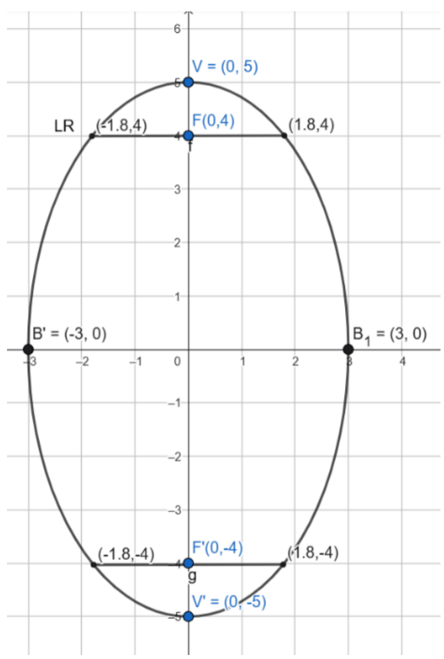
Solución
Por los datos proporcionados podemos concluir que es una elipse con vértice en el origen y es vertical, ya que tanto el vértice como los focos tienen abscisa 0, lo que indica qie su eje focal esté sobre el eje x.

Por lo que tiene la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ por lo que procedemos a calcular los valores de *a* y *b*.

Como las coordenadas de sus vértices son V (0, a) y V’(0,-a), el valor de a = 5 y por las coordenadas del foco F (0, c) y F’(0,-c), el valor de c = 4.

Utilizamos la relación $c^2 = a^2 - b^2$ y despejamos b^2, obteniendo $b^2 = a^2 - c^2$ y sustituyendo los valores de a y c:
$b^2 = (5)^2 - (4)^2$ $\quad$ $b^2 = 25 - 16$ $\quad$ $b^2 = 9$ $\quad$ $b = \pm\sqrt{9}$ $\quad$ b = ± 3

Sustituyendo los valores de a y b en la forma ordinaria de la ecuación de la elipse:
$\frac{x^2}{(3)^2}+\frac{y^2}{(5)^2}=1$ $\quad$ $\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1}$ $\longrightarrow$ **Ecuación de la elipse**



Ahora calculemos las coordenadas del Lado Recto
L = $\left(\frac{b^2}{a},c\right) = \left(\frac{3^2}{5},4\right)$ $\quad$ L = $\left(\frac{9}{5},4\right)$
L’ = $\left(-\frac{b^2}{a},c\right) = \left(-\frac{3^2}{5},4\right)$ $\quad$ L = $\left(-\frac{9}{5},4\right)$

R = $\left(\frac{b^2}{a},-c\right) = \left(\frac{3^2}{5},-4\right)$ $\quad$ L = $\left(\frac{9}{5},-4\right)$
R’ = $\left(-\frac{b^2}{a},-c\right) = \left(-\frac{3^2}{5},-4\right)$ $\quad$ L = $\left(-\frac{9}{5},-4\right)$

Ejemplo 4. Encuentra los elementos de la elipse.

Dada la siguiente ecuación de la elipse en su forma ordinaria, determina sus elementos:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una elipse horizontal, puesto que *a* es mayor que *b*:

Coordenadas de los focos

a^2= 16   y b^2= 7, calculamos

$c^2 = a^2 - b^2$ $c^2 = 16 - 7$ $c^2 = 9$ $c = \sqrt{9}$ $c = \pm 3$

Como las coordenadas están en F(c,0) y F'(-c,0), tenemos F (3,0) y F' (-3,0)

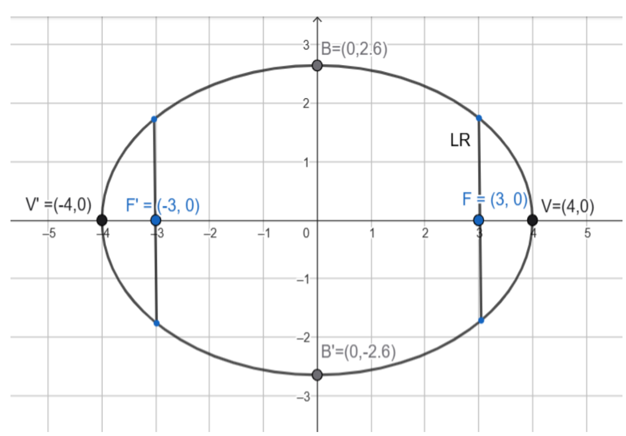
Coordenadas de los vértices

V(a,0) y V'(-a,0) y como $a^2 = 16$, entonces $a = \sqrt{16}$ por lo tanto $a = \pm 4$

Tenemos V (4,0) y V' (-4,0)

Longitud del lado recto

LR = $\frac{2b^2}{a}$ LR = $\frac{2(7)}{4}$ LR = $\frac{14}{4} = 3.5$



Coordenadas del lado recto

L = $\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ L = $\left(3, \frac{7}{4}\right)$

L' = $\left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$ L' = $\left(-3, \frac{7}{4}\right)$

R = $\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$ R = $\left(3, -\frac{7}{4}\right)$

R' = $\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$ R = $\left(-3, -\frac{7}{4}\right)$

Coordenadas de los extremos del eje menor

B (0, b) y B'(0,-b) B (0,2.6) y B' (0,-2.6)

Longitud del eje mayor

$\overline{VV'} = 2a$ $\overline{VV'} = 2(4)$ $\overline{VV'} = 8$

Longitud del eje menor

$\overline{BB'} = 2b$ $\overline{BB'} = 2(2.6)$ $\overline{BB'} = 5.2$

Las elipses se encuentran presentes en creaciones hechas por el hombre como, por ejemplo, en la arquitectura de techos, puentes, albercas, aparatos médicos y también en fenómenos naturales, tal como las órbitas que siguen los planetas.

Ejemplo 5: Encontrando el Área de una elipse.

Desde el año 2008, ALACERO (Asociación Latinoamericana del Acero) incentiva la construcción con acero entre los estudiantes de arquitectura de América latina a través de un concurso. En 2017, Chile se llevó el primer lugar con la construcción de un jardín infantil con forma elíptica.

El jardín tiene 60 m de largo y 42 m de ancho aproximadamente.

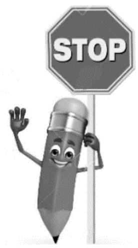
a. Escribe la ecuación del jardín.
b. El área de una elipse es $A = \pi ab$. ¿Cuál es el área del jardín?

Solución

a. El eje mayor es horizontal con $a = \frac{60}{2} = 30$ y $b = \frac{42}{2} = 21$.
La ecuación es $\frac{x^2}{30^2} + \frac{y^2}{21^2} = 1$

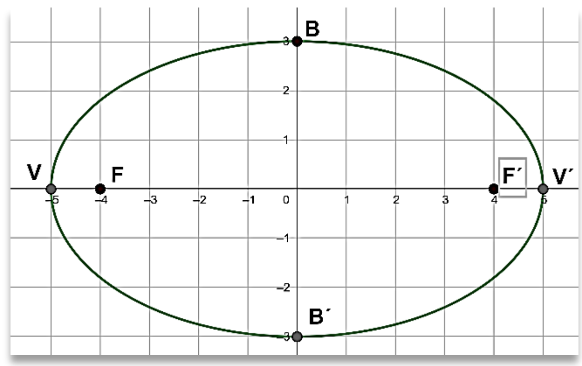
b. El área es $A = \pi(30)(21) \approx 1978.2$ m^2

Evaluamos



Es momento de hacer una pausa y evaluar nuestro conocimiento hasta el momento del tema de elipse.

1. Completa cada oración utilizando la elipse mostrada.



a) Los puntos (-5, 0) y (5,0) son llamados: ____________________

b) Los puntos (-4,0) y (4,0) son llamados: ____________________

c) El segmento que une a los puntos V y V´ se le conoce como: ______________

d) El segmento que une a los puntos B y B´ se le conoce como: ______________

e) La longitud del eje mayor es: _______

f) La longitud del eje menor es: ________

g) ¿Cómo determinas, a través de la ecuación, si la elipse es horizontal o vertical?

____

2. Encuentra la ecuación de la elipse con centro en el origen dado los siguientes elementos

1. V (0,7) F (0,4)
2. V (0,-10) F (0,-6)

3. V (6,0)   F (4,0)
4. V (5,0)   F (4,0)

Problemas de aplicación.

3. La Elipse es un campo abierto que se encuentra detrás de la Casa Blanca, residencia oficial del presidente de los Estados Unidos. Según Google Maps, tiene 206.75 m de longitud y 106.55 m de ancho.

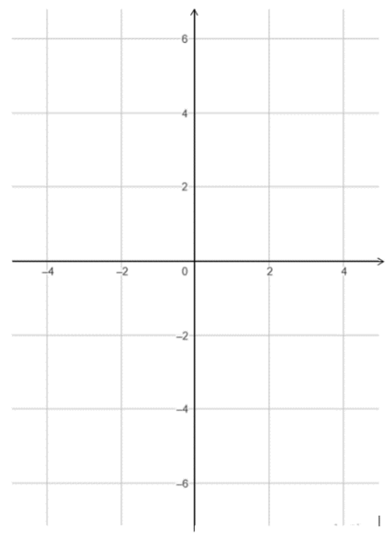
a) Escribe la ecuación de La Elipse.

b) Calcula el área de La Elipse de la Casa Blanca

$(A = \pi ab)$

4. Grafica la siguiente elipse. Primero identifica si es horizontal o vertical seguido de los elementos que la caracterizan.

$$25x^2 + 9y^2 = 225$$



Coordenadas de los Vértices V, V' ____________

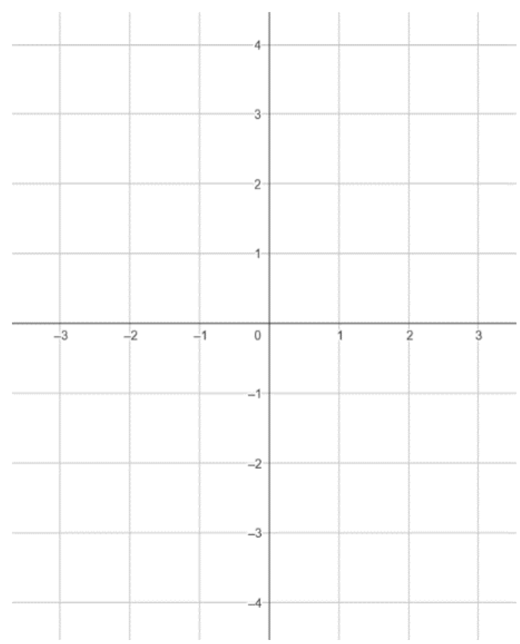
Coordenadas de los Focos F, F' ____________

Coordenadas del Eje mayor ____________

Coordenadas del Eje Menor ____________

Coordenadas del Lado recto ____________

5. Grafica la siguiente elipse. Primero identifica si es horizontal o vertical seguido de los elementos que la caracterizan.



$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Coordenadas de los Vértices V, V'

____

Coordenadas de los Focos F, F'

____

Coordenadas del Eje mayor

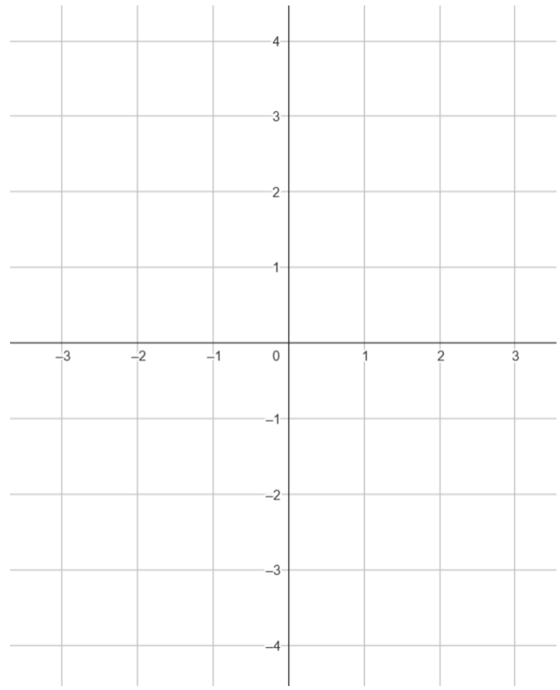
____

Coordenadas del Eje Menor ___________________

Coordenadas del Lado recto __________________

6. Grafica la siguiente elipse. Primero identifica si es horizontal o vertical seguido de los elementos que la caracterizan.

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$



Coordenadas de los Vértices V, V' _______________

Coordenadas de los Focos F, F' _______________

Coordenadas del Eje mayor ___________________

Coordenadas del Eje Menor ___________________

Coordenadas del Lado recto __________________

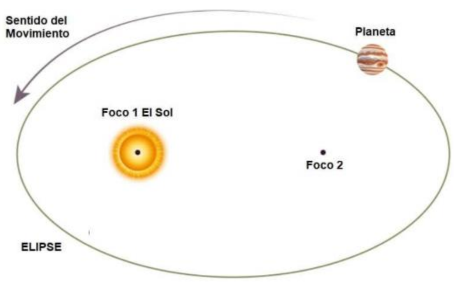
Explicamos

Leyes de Kepler.

Anteriormente se mencionó a **Johannes Kepler** y sus leyes, las cuales fueron enunciadas para describir matemáticamente el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol.

Las tres leyes de Kepler son fundamentales para entender el movimiento planetario:

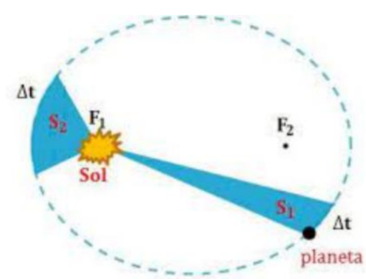
1. Primera Ley (Ley de las Elipses):



Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas, con el Sol ubicado en uno de los focos de la elipse. Esto significa que la trayectoria de un planeta no es un círculo perfecto, sino una elipse, que es una forma ovalada.

2. Segunda Ley (Ley de las Áreas):

La línea que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales. Esto significa que un planeta se mueve más rápido cuando está más cerca del Sol y más lento cuando está más lejos, manteniendo una velocidad constante en el área barrida por esa línea.



3. Tercera Ley (Ley de los Períodos):

El cuadrado del periodo orbital de un planeta (el tiempo que tarda en completar una órbita) es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol. En otras palabras, a mayor distancia media del Sol, mayor será el periodo orbital.

Podemos decir que **la primera ley establece que las órbitas planetarias son elipses con el Sol en uno de los focos**; la segunda, que una línea que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales; y la tercera, que el cuadrado del periodo orbital de un planeta es proporcional al cubo de la distancia media al Sol.

La primera ley de Kepler establece que los planetas orbitan el Sol siguiendo trayectorias elípticas, con el Sol en uno de los focos de la elipse. Un ejercicio común relacionado con esta ley involucra calcular parámetros de una elipse, como su semieje mayor o excentricidad, dada la distancia máxima y mínima del planeta al Sol.

También se pueden realizar ejercicios comparando las órbitas de diferentes planetas o cuerpos celestes, utilizando la primera ley de Kepler como base.

Ejercicio

Instrucción: Investiga y describe dos ejemplos de la aplicación de la Primera Ley de Kepler:

1. ____

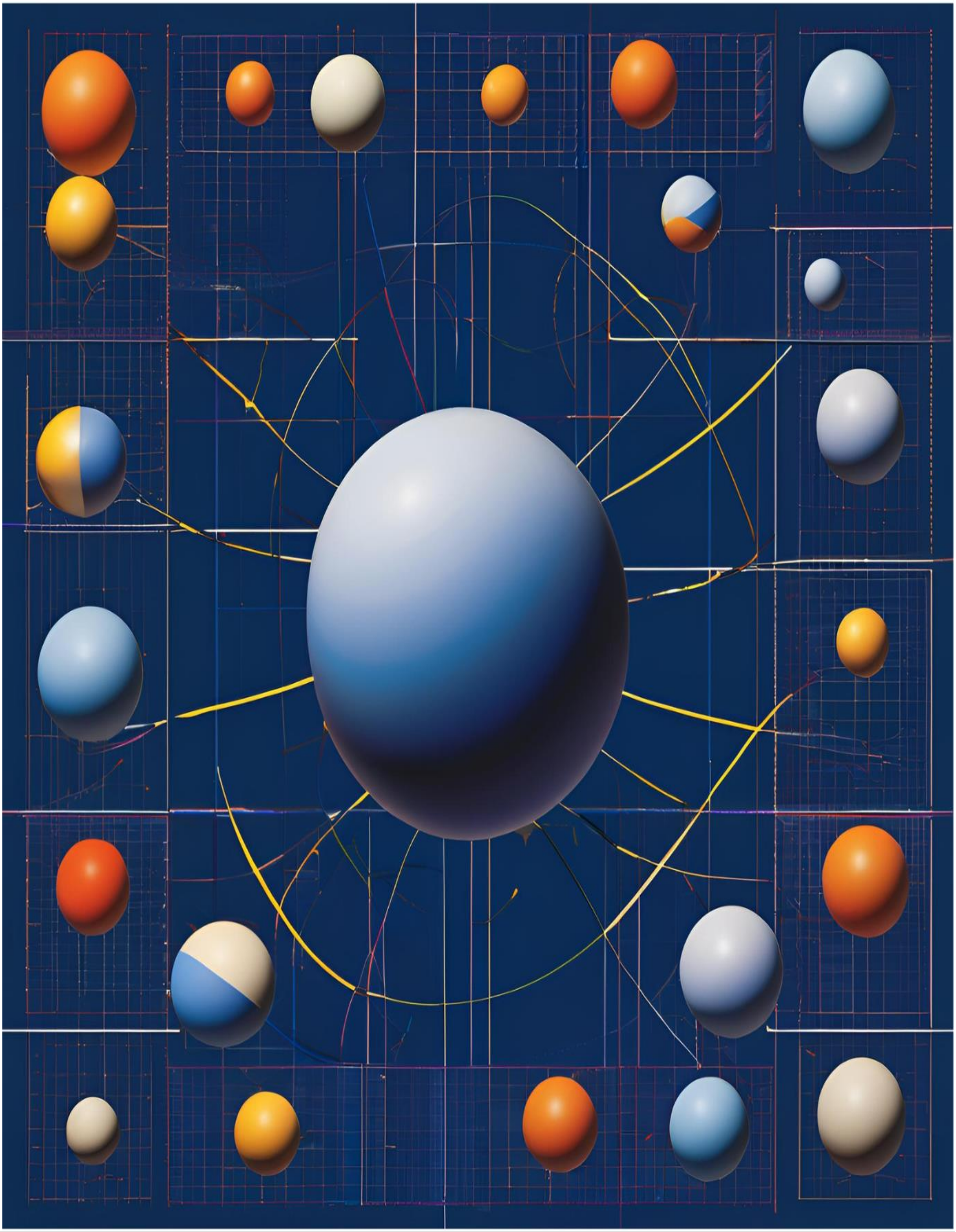
   ____

   ____

2. ____

   ____

   ____



PARCIAL 3

Evaluación Diagnóstica

Instrucción: Lee con atención y responde de manera individual las siguientes preguntas.

1)¿En qué cuadrante se localiza la coordenada A(-3,-5)?

a) I
b) II
c) III
d) IV

2) Si un ángulo se mide en sentido contrario a las agujas del reloj se dice que es:

a) agudo
b) negativo
c) adyacente
d) positivo

3) Si un ángulo se mide a favor a las agujas del reloj se dice que es:

a) obtuso
b) recto
c) positivo
d) negativo

4) Calcula la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son A(-6,3) y B(2,-3)

a) 12
b) 10
c) 13
d) 11

5) ¿Cuántos grados tiene una circunferencia en geometría?

a) 90^0
b) 180^0
c) 270^0
d) 360^0

6) ¿Cuál es el resultado de desarrollar $(2x+1)^2$?

a) $4x^2+4x+1$
b) 2x+1
c) (2x+1) (2x)
d) $4x^2+4x+2$

7) ¿Cuál es el resultado de (a+b)(a-b)?

a) a^2-b^2
b) a^2+b^2
c) a-b
d) a+b

8) Al resolver la ecuación lineal 2x+3=21, resulta:

a) 18
b) -18
c) 9
d) -9

9) La circunferencia, parábola, hipérbola y elipse, ¿Que grupo forman?

a) asíntotas
b) logaritmos
c) cónicas
d) circulares

Progresión 8

Utiliza las esferas de Dandelin para identificar que las cónicas (incluyendo la hipérbola) se obtienen como el resultado de los cortes de un plano a un cono circular de doble hoja.

Meta de aprendizaje	Categoría
C2M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento.
Subcategoría	**Contenido**
S2. Pensamiento intuitivo. **S3.** Pensamiento formal.	**1.-**Generar cónicas mediante esferas de Dandelin.

Enganchamos

Generar cónicas mediante esferas de Dandelin.

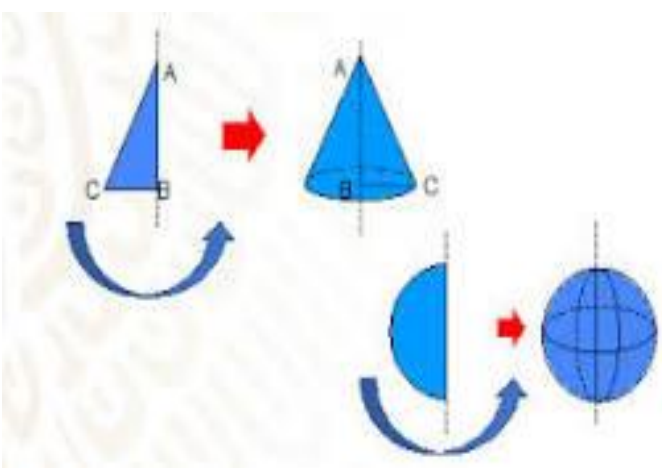
¿Sabías que?

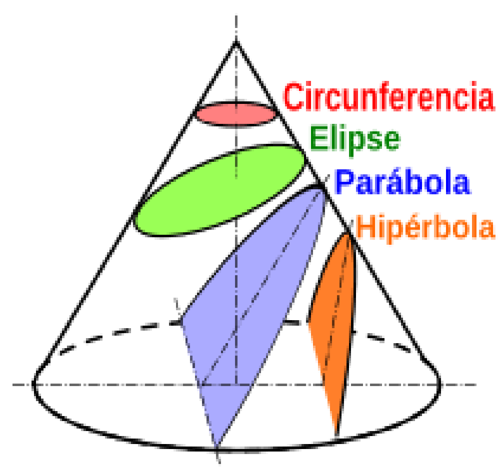
Las esferas de Dandelin son una herramienta geométrica utilizada para demostrar propiedades de las cónicas (elipse, parábola e hipérbola). Su nombre proviene del matemático belga Germinal Pierre Dandelin, quien en 1822 utilizó estas esferas para explicar por qué las secciones cónicas cumplen ciertas propiedades métricas.

Exploramos

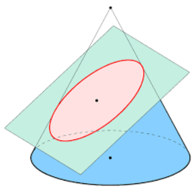
Curvas cónicas.

Son las secciones producidas por un plano secante en una superficie cónica de revolución (Cono), según la posición relativa del plano y el cono, se obtienen cuatro curvas cónicas diferentes, elipse, parábola, circunferencia o hipérbola.

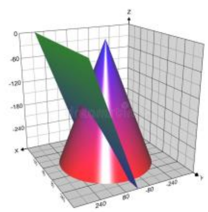




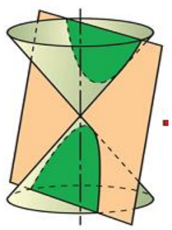
Tipos de curvas cónicas.



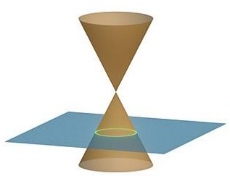
La Elipse es una curva cerrada y plana y se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos fijos denominados focos es constante.



La Parábola es una curva plana, abierta de una rama, definida como lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo denominado foco, y de una recta denominada directriz.



La Hipérbola es una curva plana, abierta y con dos ramas, definida como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos fijos denominados focos es constante.



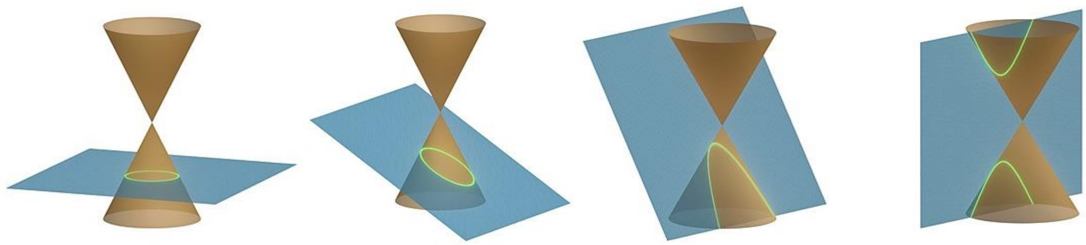
Cuando el plano secante es normal al eje, la sección es circular.

Excentricidad de una curva cónica.

La directriz de una curva cónica y su foco correspondiente están entre sí relacionados de tal forma que **la razón de distancias** de un punto cualquiera de la curva “A” al foco y recta directriz correspondiente, es una cantidad constante que se denomina **Excentricidad**.

Como veremos, el foco es el punto de tangencia de una de las dos esferas de Dandelin con el plano secante, su directriz correspondiente es la intersección entre el plano secante y el plano de contacto perteneciente a la misma esfera que genera el foco. La excentricidad es muy importante porque con ella sabemos la cónica que se genera.

Circunferencia | Elipse | Parábola | Hipérbola



Excentricidad=No existe | Excentricidad$\leqslant$ *1* | Excentricidad=1 | Excentricidad$\succ$ *1*

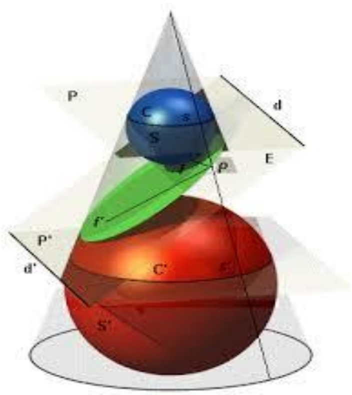
Curvas cónicas.

Son las **secciones** producidas por un plano secante en una superficie cónica de revolución (Cono), según la posición relativa del plano y el cono, se obtienen cuatro curvas cónicas diferentes, **Elipse, Parábola, Circunferencia o Hipérbola.**

Tipos de curvas cónicas.

- Obtenemos una Elipse cuando el ángulo ”a” que forma el plano secante Q, con el eje del cono es **mayor** que el formado por las generatrices con el mismo eje “b”.
- Obtenemos una Parábola cuando el ángulo el ángulo ”a” que forma el plano secante Q, con el eje del cono que forma el plano secante con el eje es **igual** al formado por las generatrices con el eje “b”.
- Obtenemos una Hipérbola cuando el ángulo” a” que forma el plano secante Q, con el eje del cono es **menor** que el ángulo formado por las generatrices con el eje “b”.
- Cuando el plano secante **pasa por el vértice del cono**, en la intersección se producen **dos generatrices rectas.**
- Cuando el **plano secante es normal al eje**, la **sección es circular.**

Explicamos



Las **cónicas de Dandelin** se generan utilizando dos esferas inscritas dentro de un cono y un plano que corta al cono. Este método geométrico demuestra que las secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola) son curvas resultantes de la intersección del cono con un plano, y que sus propiedades pueden explicarse con esferas tangentes.

Instrucción 1.- Revisa el siguiente video que se muestra en el QR.

Instrucción 2.- Responde las siguientes preguntas, basándote en el video anterior.

1.- De acuerdo al video revisado ¿Por qué se llaman secciones cónicas?

2.- ¿Cómo se forma un cono?

3.- ¿Cómo se origina una circunferencia?

4.- ¿Cómo se origina la elipse?

5.- ¿Cómo se origina la parábola?

6.- ¿Cómo se origina la hipérbola?

Elaboramos

Actividad grupal.

Instrucciones: Organizados en equipos de 4 integrantes reúnan el siguiente material y lleven a cabo la práctica titulada ‘’generar cónicas utilizando las esferas de Dandelin.

Material.

1) Palillos para brochetas de unos 20 centímetros de largo.
2) Esferas de unicel de diferentes diámetros.
3) Silicona.
4) Cartulina para recortar los planos o filminas.
5) Pistola de silicona.
6) Extensión eléctrica para conectar.

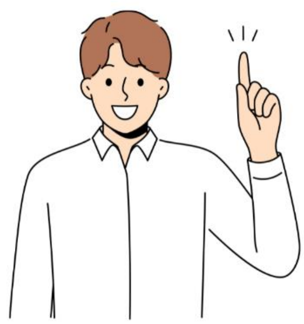
Procedimiento:

1. Junta y pega con silicona los palillos en un extremo y ábrelo para que quede en forma de cono.
2. Pega con silicona una esfera pequeña en el fondo del cono y otra más grande un poquito separadas para que entre el plano.
3. Elige la inclinación del plano.

a) **Elipse:** Si el plano corta el cono en un ángulo menor al de sus generatrices, intersectando ambos lados del cono. Ambas esferas tocan el plano en puntos distintos, que son los focos de la elipse.
b) **Parábola:** Si el plano es paralelo a una generatriz del cono, la intersección forma una parábola. Solo una esfera toca el plano, y ese punto es el foco.
c) **Hipérbola:** Si el plano corta ambas hojas del cono en un ángulo mayor al de sus generatrices, la intersección es una hipérbola. Las dos esferas tocan el plano en dos puntos, que son los focos de las ramas de la hipérbola.

Notas:

- Realiza tus dibujos para la elipse, parábola e hipérbola.
- Se anexa un enlace por si dudas de alguna parte del procedimiento puedas visualizar la práctica, comprenderla y llevarla a cabo.



Evaluamos

Instrucciones: De forma individual subraya la respuesta correcta a cada cuestión, luego reúnete con tu equipo para verificar respuestas y corregir errores.

1- Cuando el ángulo “a” que forma el plano secante Q con el eje del cono es mayor que el formado por las generatrices con el mismo eje “b”, se obtiene una:

a) circunferencia
b) elipse
c) parábola
d) hipérbola

2.- Cuando el ángulo el ángulo “a” que forma el plano secante Q con el eje del cono que forma el plano secante con el eje es igual al formado por las generatrices con el eje “b”, se obtiene una:

a) circunferencia
b) elipse
c) parábola
d) hipérbola

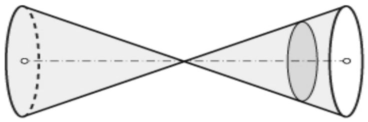
3.- Cuando el ángulo “a” que forma el plano secante Q con el eje del cono es menor que el ángulo formado por las generatrices con el eje “b”. Cuando el plano secante pasa por el vértice del cono, en la intersección se producen dos generatrices rectas, entonces se obtiene una:

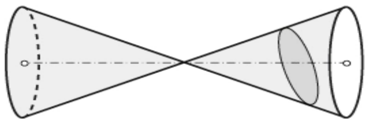
a) circunferencia
b) elipse
c) parábola
d) hipérbola

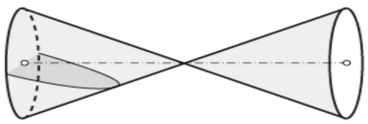
4.- Cuando el plano secante es normal al eje, la sección que se obtiene es una:

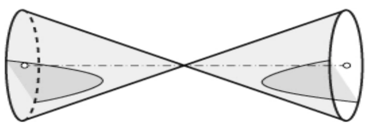
a) circunferencia
b) elipse
c) parábola
d) hipérbola

Instrucción: Une con una línea la imagen con su respectivo nombre.









Hipérbola

Parábola

Elipse

Circunferencia

Progresión 9

Considera movimientos del plano y cambios de coordenadas al usar traslaciones y rotaciones con el fin de simplificar la expresión analítica de curvas en el plano.

Meta de aprendizaje	Categoría
C3M4. Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	**C3.** Solución de problemas y modelación.
Subcategoría	**Contenido**
S3. Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.	**1.-** Cambio de coordenadas mediante traslación. **2.-** Cambio de coordenadas mediante rotación.

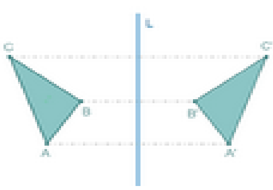
Enganchamos

¿Sabías que?

La traslación, la rotación son movimientos que se realizan con una figura en un plano; a la izquierda, a la derecha, diagonal, arriba y abajo.

Exploramos

Cambio de coordenadas mediante traslación.



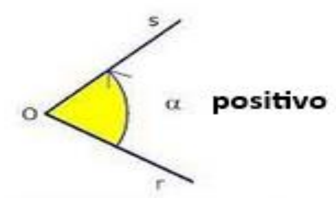
Traslación: es el movimiento directo de una figura en la que todos sus puntos:

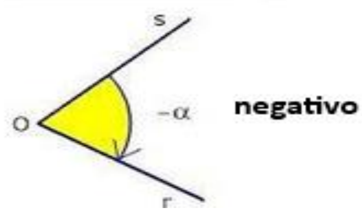
- Se mueven en la misma dirección.
- Se mueven a la misma distancia.

El resultado de una traslación es otra figura idéntica que se ha desplazado una distancia en una dirección determinada.

Cuando movemos un mueble en una misma dirección lo estamos trasladando. El tren se traslada a lo largo de una vía recta. El ascensor nos traslada de una planta a otra... Estas y muchas otras más son situaciones en las que el movimiento de traslación está presente en nuestras vidas.

Cambio de coordenadas mediante rotación.





Rotación o giro: es un movimiento alrededor de un punto que mantiene la forma y el tamaño de la figura original.

Una rotación se determina por estos tres elementos:

- Un ángulo que determina la amplitud de la rotación.
- Un punto llamado centro de rotación.
- Un sentido de la rotación que puede ser del mismo sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario.

Explicamos

Cambio de coordenadas mediante traslación.

Instrucción: Representa gráficamente el triángulo el cual está formado por las coordenadas de sus vértices, luego trasladarlo 5 unidades a la derecha.

A (-4,5), B (-3,2), C (-2,7)

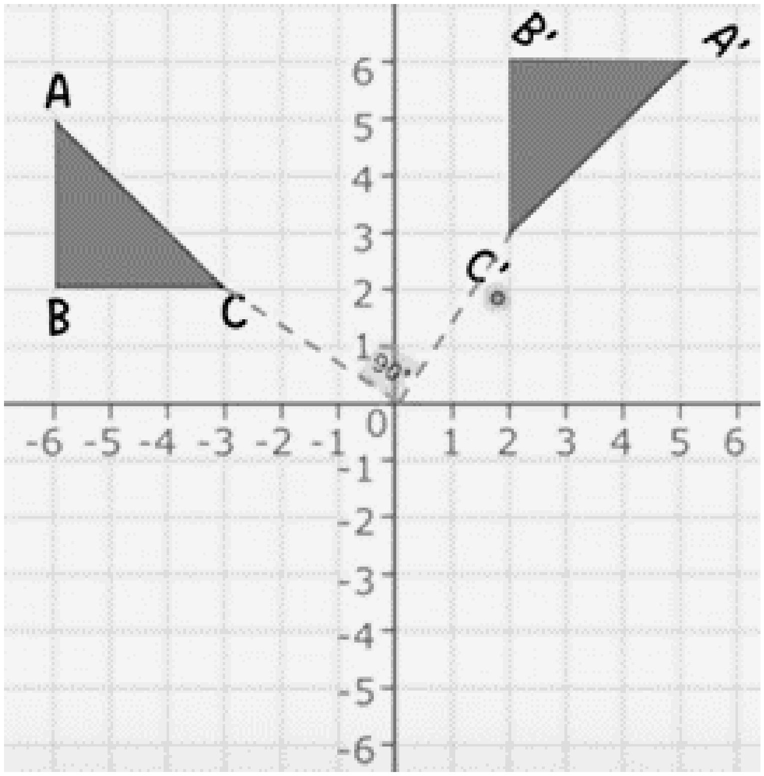
Proceso:

1) Gráfica las coordenadas.
2) Une los puntos y forma el triángulo.
3) Traslada, usando líneas punteadas, las coordenadas cinco unidades a la derecha.
4) Une los nuevos puntos.

Cambio de coordenadas mediante rotación.

Proceso:

1) Dibuja un plano cartesiano.
2) Localiza el origen del plano cartesiano.
3) Grafica los pares ordenados A (-6,5), B (-6,2), C (-3,2).
4) Para este ejemplo guiado por el docente el giro es de -90 ⇒, en sentido de las agujas del reloj. Le sugiero ponga una marca en el cuadrante donde quedará la imagen.
5) Gira la figura original de tal manera que la imagen quede donde puso el punto de referencia, ahora puedes ver que los ejes se invirtieron, el eje y ahora es el eje x, pues ahora grafica las coordenadas.
6) Ubica los puntos o pares ordenados y únelos.
7) Devuelve la figura con un giro a su posición original y la imagen ha hecho su rotación.



Al seguir las instrucciones la rotación debe quedar como la que se muestra en la imagen.

Elaboramos

Instrucciones: En equipo de 4 integrantes lleven a cabo la elaboración de los siguientes ejercicios.

1) Grafica y lleva a cabo la traslación de cuatro unidades a la derecha de las siguientes imágenes que se forman con las siguientes coordenadas, te recomiendo utilizar hojas milimétricas.

I) A (2,3), B (5,7), C (8,2)
II) A (-4,1), B (0,6), C (3, -2)
III) A (1,1), B (4,4), C (6,0)
IV) A (-3,-2), B (2,5), C (-1,4)

2) Grafica y lleva a cabo la rotación de las siguientes imágenes que se forman con las siguientes coordenadas, te recomiendo utilizar hojas milimétricas.

1) Rotación -180 grados⇒

A (-4,6), B (-2,6), C (-5,4), D (-1,4)

2) Rotación de 90 grados.

A (-4,-4), B (-2,-2), C (-1,-2), D (-1,-6), E (-2,-6)

Evaluamos

Instrucciones: De forma individual dado las coordenadas lleve a cabo la rotación y traslación de las siguientes coordenadas en el plano.

a) **Traslada la figura cuatro unidades hacia la izquierda de acuerdo con las siguientes coordenadas A (3,2), B (6,4), C (4,8)**

b) De acuerdo con las siguientes coordenadas A(3,2),B(6,4),C(4,8), rota la figura 270^0 ⇒.

Progresión 10

Utiliza coordenadas polares e identidades trigonométricas para lograr una descripción más económica de curvas que de ser descritas cartesianamente tendrían una expresión muy complicada, como, por ejemplo, las espirales, cardioides, entre otras.

Meta de aprendizaje	Categoría
C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	**C4**. Interacción y lenguaje matemático.
Subcategoría	**Contenido**
S1. Registro escrito simbólico, algebraico e iconográfico.	**1.-**Coordenadas polares y rectangulares. **2.-** Identidades trigonométricas.

Enganchamos

¿Sabías que?

Para ubicar un punto cualquiera en el plano, el sistema de coordenadas rectangulares lo fija con referencia a los ejes x y y, los cuales son rectas perpendiculares entre sí.
En el sistema de coordenadas polares, dicho punto precisa su posición con referencia a una recta fija y un punto fijo de la misma recta.

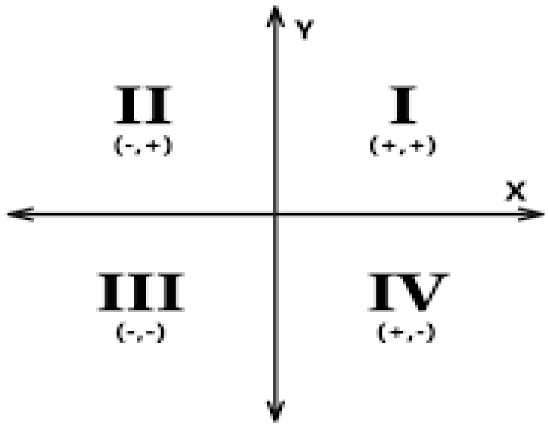
Exploramos

Sistema de coordenadas rectangulares.

Este sistema también se denomina cartesiano en honor a Rene Descartes, por haber sido quien lo emplea en la unión del álgebra con la geometría plana para dar lugar a la geometría analítica.

El sistema de coordenadas rectangulares consta de dos rectas dirigidas XX’ y YY’ llamadas ejes de coordenadas y que son perpendiculares entre sí; la recta XX’ se llama eje X’, la recta YY’ se llama eje Y; su punto de intersección O es el origen del sistema.

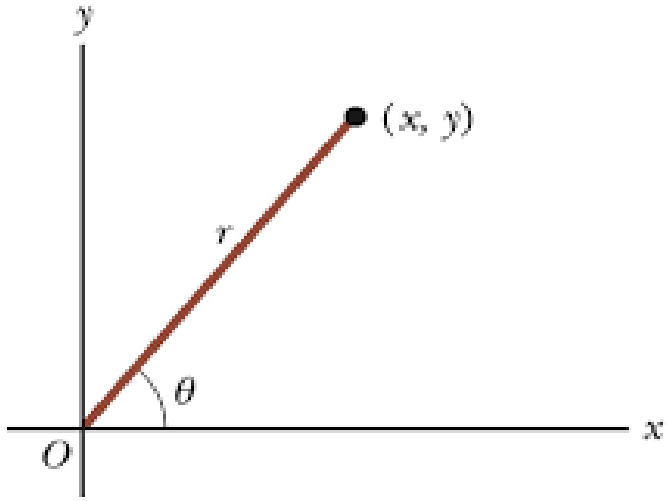
Sistema coordenado rectangular



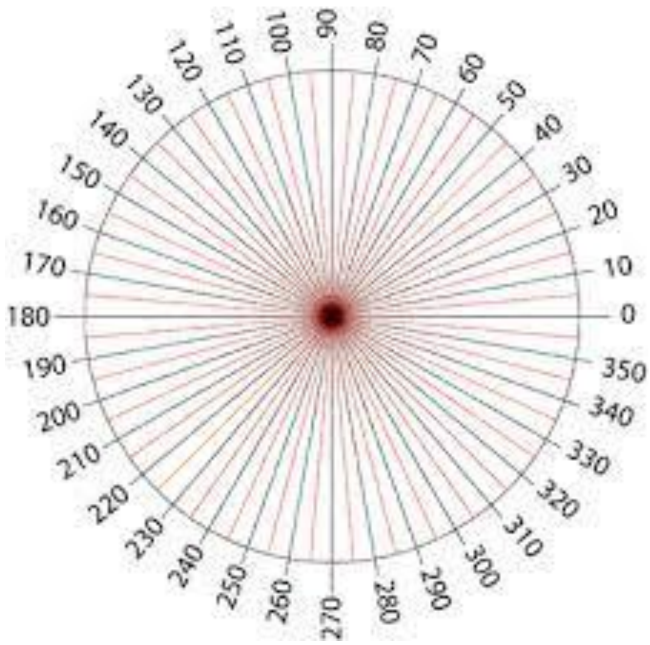
Estos ejes coordenados dividen el plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, los cuales se ordenan en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Sistema de coordenadas polares.

La recta fija se denomina eje polar y el punto fijo polo.



En la gráfica, sea la recta horizontal OA el eje polar el punto O el polo.
Si P es un punto cualquiera en el plano coordenado, al trazar el segmento OP, representamos su distancia por r y el ángulo AOP por θ.
La ubicación del punto P con respecto al eje polar y al polo, queda determinada cuando se reconocen r y θ que se denominan coordenadas polares del punto P; específicamente r se llama radio vector y θ el ángulo polar, ángulo vectorial o argumento de P.
El radio vector r es positivo cuando se mide desde el polo hasta el punto P, y negativo cuando se mide del punto P al polo; el ángulo polar θ es positivo cuando se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
Las coordenadas de P se denotan por (r,θ) y la línea recta que pasa por el polo y es perpendicular al eje polar se denomina el eje a 90 grados.
Para trazar un punto en el sistema de coordenadas polares, se recomienda el uso del papel coordenado polar, el cual se caracteriza por una serie de circunferencias concéntricas, es decir, tienen su centro común en el polo y sus radios son múltiplos del que se considera como unidad patrón de medida; también está formado por rectas concurrentes que pasan por el polo, los ángulos entre las rectas son iguales.



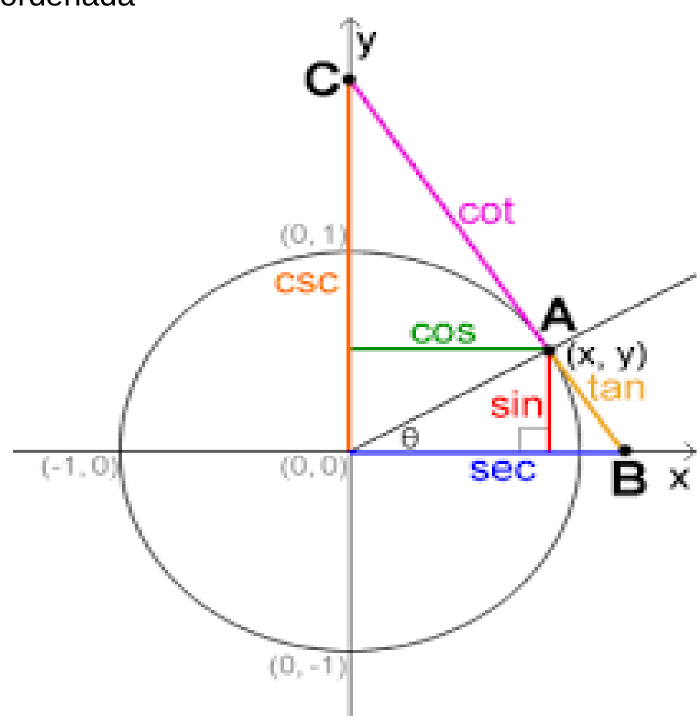
Identidades trigonométricas.

Las identidades trigonométricas son igualdades que se cumplen para cualquier valor del ángulo que aparece en la expresión

Si tenemos el círculo unitario y en el ángulo MOP, donde p (x, y) es el punto en el que el lado final del ángulo corta la circunferencia, entonces:

x= al valor de la abscisa

y= al valor de la ordenada



Como ya sabemos que $tan\theta = \frac{sen}{cos}$ y $cot\theta = \frac{cos}{sen}$, tenemos entonces dos relaciones principales y de ellas tenemos cuatro más.

De las siguientes fórmulas despeja:

1) $tan\theta = \frac{sen}{cos}$

$cos\,\theta =$ $\qquad$ $sen\theta =$

2) $cot\theta = \frac{cos}{sen}$,

$cos\,\theta =$ $\qquad$ $sen\theta =$

Igualdades o relaciones Pitagóricas

$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$ $\qquad$ $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$ $\qquad$ $1 + cot^2\theta = csc^2\theta$

Demostración de identidades trigonométricas.

Demostrar una identidad trigonométrica consiste en comprobar que la igualdad propuesta es cierta para cualquier valor del ángulo que aparece en ella.

Para un alumno que es principiante en esta actividad, es recomendable que todos los términos de la igualdad se expresen en función de senos y cosenos, y trabajar en uno de los miembros.

Para demostrar identidades es necesario conocer bien las identidades trigonométricas fundamentales; dominar el álgebra, principalmente los productos notables y la factorización; manejar las operaciones con fracciones comunes y, sobre todo, mucha práctica.

Las siguientes reglas son muy útiles para demostrar identidades trigonométricas:

1) Consigue un formulario completo y confiable
2) Si no encuentras la sustitución adecuada, convierte todo a senos y cosenos.
3) Si ves un 1 sumando o restando a una función trigonométrica al cuadrado, es probable que sea una identidad pitagórica.
4) El 1 es muy importante, así que, si una identidad trigonométrica se escribieron constantes mayores que uno, divide todo entre la constante para obtener la unidad.
5) Siempre que puedas, reacomoda los términos, así tendrás otra visión del problema.
6) El álgebra es fundamental. Pueden aparecer productos que desarrollar o expresiones que se puedan factorizar.
7) Ten cuidado con los denominadores comunes y fíjate en los recíprocos.

Formulario para identidades.

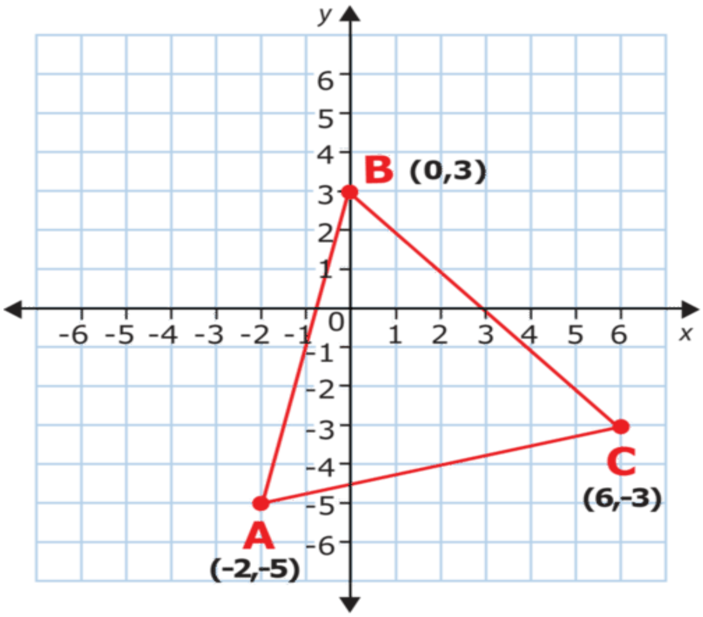
	sen A	cos A	tan A	cot A	sec A	csc A
sen A		$\sqrt{1-cos^2A}$	$\frac{\sqrt{tan\ A}}{\sqrt{1+tan^2A}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+cot^2A}}$	$\frac{\sqrt{sec^2A-1}}{secA}$	$\frac{1}{csc\ A}$
cos A	$\sqrt{1-sen^2A}$		$\frac{1}{\sqrt{1+tan^2A}}$	$\frac{cotA}{\sqrt{1+cot^2A}}$	$\frac{1}{secA}$	$\frac{\sqrt{csc^2A-1}}{cscA}$
tan A	$\frac{senA}{\sqrt{1-sen^2A}}$	$\frac{\sqrt{1-cos^2A}}{cosA}$		$\frac{1}{cot\ A}$	$\sqrt{sec^2A-1}$	$\frac{1}{\sqrt{csc^2A-1}}$
cot A	$\frac{\sqrt{1-sen^2A}}{senA}$	$\frac{cos\ A}{\sqrt{1-COS^2A}}$	$\frac{1}{tanA}$		$\frac{1}{\sqrt{sec^2A-1}}$	$\sqrt{csc^2A-1}$
secA	$\frac{1}{\sqrt{1-sen^2A}}$	$\frac{1}{cosA}$	$\sqrt{1+tanA}$	$\frac{\sqrt{1+cot^2A}}{cotA}$		$\frac{csc\ A}{\sqrt{csc^2A-1}}$
cscA	$\frac{1}{senA}$	$\frac{1}{\sqrt{1-cos^2A}}$	$\frac{\sqrt{1-tan^2A}}{tanA}$	$\sqrt{1+cotA}$	$\frac{sec\ A}{\sqrt{sec^2A-1}}$	

Explicamos

Sistema de coordenadas rectangulares.

Instrucción: Graficamos las siguientes coordenadas, unimos los puntos, calculamos las distancias y el perímetro del polígono.

1) Graficando coordenadas A (-2,-5), B (0,3), C (6,-3)



2) Calculando distancias $\sqrt{(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1})^2+(\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1})^2}$

a) d$\underline{AB\ }\ =\sqrt{(0-(-2))^2+(3-(-5))^2}=\sqrt{(-2)^2+(8)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}=8.24$

b) d$\underline{AC\ }\ =\sqrt{(6-(-2))^2+(-3-(-5))^2}=\sqrt{(6+2)^2+(-3+5)^2}=\sqrt{8^2+2^2}=$

$\sqrt{64+4}=\sqrt{68}=8.24$

c) d$\underline{BC\ }\ =\sqrt{(6-(0))^2+(-3-3)^2}=\sqrt{(6)^2+(-6)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}$=8.48

3) Perímetro

P=$d\underline{AB}$+d$\underline{AC}+d\underline{BC}\ entonces\ P=8.24u+8.24u+8.48u=24.96u$

Sistema de coordenadas polares.

Fórmulas:

$a)\ x = rcos\boldsymbol{\theta}$ $\quad b)\ y = rsen\boldsymbol{\theta}$ $\quad c)\ x^2 + y^2 = r^2$ $\quad d)\ r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

$e)\ \theta = arctg\,\frac{y}{x}$ $\quad f)\ sen\theta = \pm\sqrt{\frac{y}{x^2+y^2}}$ $\quad g)\ cos\theta = \pm\sqrt{\frac{x}{x^2+y^2}}$

1) Hallar las coordenadas rectangulares del punto P cuyas coordenadas polares son (6,150^0)

a) Aplica la fórmula de transformación

$\boldsymbol{x = rcos\theta}$ $\quad \boldsymbol{y = rsen\theta}$

$\boldsymbol{x = 6\ cos\ 150^0}$ $\quad \boldsymbol{y = 6\ sen\ 150}$

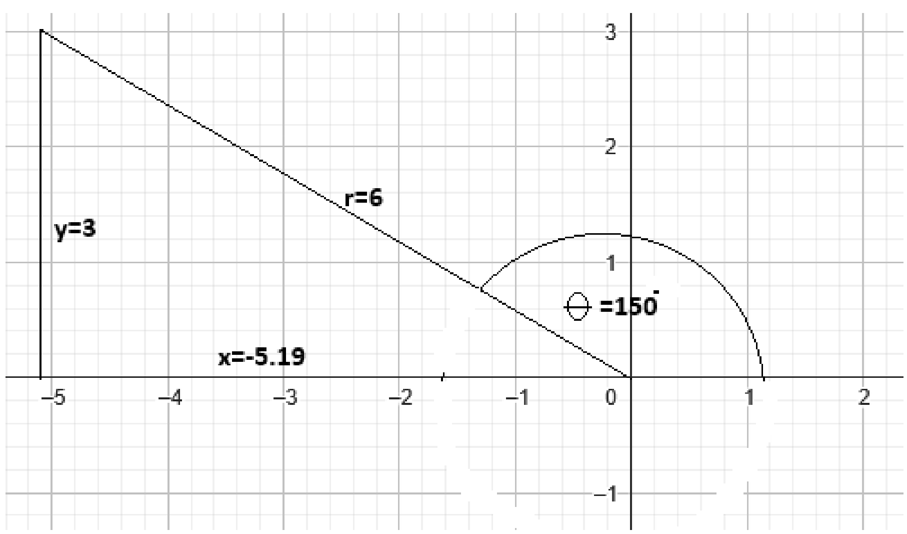
$\boldsymbol{x = 6\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)}$ $\quad \boldsymbol{y = 6\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\boldsymbol{x = -3\sqrt{3}}$ $\quad \boldsymbol{y = 3}$

b) Construye la coordenada P (x, y)

P(-3$\sqrt{3}$,3)

c) Gráfica la coordenada polar (6,150^0) y el punto P(x,y)



2) Determinar las coordenadas polares del punto A cuyas coordenadas rectangulares son (-4,-7). Utiliza hojas milimétricas.

a) *¿Cuáles son las coordenadas rectangulares del punto A?*

Respuesta:

x=-4 y y=-7

b) Utilizando la fórmula $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, calcula el radio.

$$r = \pm\sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65} = 8.06$$

c) Utilizando la fórmula $\theta = arctg\frac{y}{x}$, calcula el ángulo

$\theta = arctg = \left(\frac{-7}{-4}\right)$=$arc\ tg\ 1.75 = \theta = 60^0 15' 18''$

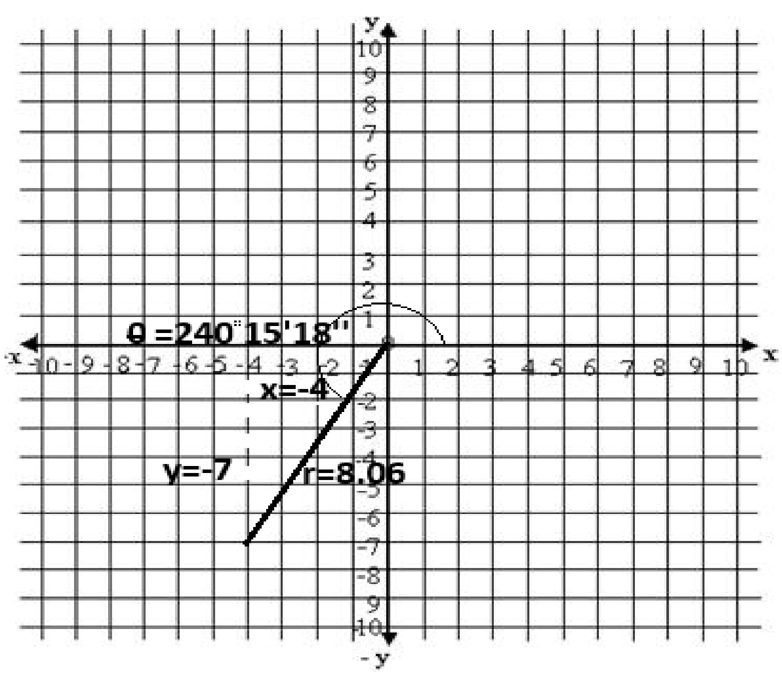
El punto se ubica en el tercer cuadrante, por lo que:

$$\theta = 180 + 60^0 15' 18''\ entonces\ \theta = 240^0 15' 18''$$

d) Las coordenadas polares del punto A en el sistema de coordenadas polares son:

A($\sqrt{65}, 240^0 15' 18''$)

f) Construye la gráfica.



Identidades trigonométricas.

Ejemplos:

1) Demostrar la siguiente identidad. Convierte el primer miembro a senos y cosenos, y sumamos obteniendo un denominador común que es sen A.

$$senA + cosAcotA = cscA$$
$$= senA + cosA\,\frac{cosA}{senA}$$
$$= sen^2A + cosA\,cosA$$
$$= \frac{sen^2A + cos^2A}{senA} = \frac{1}{senA}$$

Como $\frac{1}{senA} = cscA,$ entonces queda demostrada la identidad.

2) En este ejemplo laboramos los dos miembros, y comparamos los dos lados de la igualdad.

$$csc\ A \cdot sec\ A = cot\ A + tan\ A$$
$$csc\ A\ sec\ A = \quad cot\ A\ +\ tan\ A = \frac{cos\ A}{sen\ A} + \frac{sen\ A}{cos\ A}$$
$$\frac{1}{sen\ A}\ \frac{1}{COS\ A}\ = \ \frac{cos^2\ A +\ sen^2\ A}{sen\ A\ cos\ A}$$
$$\frac{1}{sen\ A}\ \frac{1}{COS\ A}\ = \ \frac{1}{sen\ A}\ \frac{1}{COS\ A}$$

Al ser iguales los dos miembros entonces queda demostrada la identidad.

3) Demostrar que:

csc A-sen A=cot A cos A

Trabajamos con el primer miembro.

Como   csc A=$\frac{1}{sen\ A}$

=$\frac{1-sen^2}{sen\ A}$

=$\frac{cos^2A}{sen\ A}$

=$\frac{cos\ A}{sen\ A}\,cos\ A$

=$cot\ A\ cos\ A$

Observa el siguiente código **QR** para complementar la explicación anterior.

Elaboramos

Instrucción 1: Graficar las siguientes coordenadas, unir los puntos, calcular las distancias y el perímetro del polígono que se forma.

1) A (1,3), B (0,-4), C (-6,6)
2) A (2,2), B (7,-4), C (-8,10)
3) A (-9,-3), B (-5,1), C (4,0)
4) A (-4,2), B (-2,-3), C (1,-6), D (0,4)

Instrucción 2: En equipo de 4 integrantes lleven a cabo la elaboración de los siguientes ejercicios utilizando hojas milimétricas.

1) Transforma las coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

A) $(8,45^0)$
B) $(1,90^0)$
C) $(3\sqrt{2},150^0)$
D) $(-4,330^0)$
E) $(4\sqrt{2},225^0)$
F) $(7,300^0)$

2) Transforma coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

a) A (-5,-12)
b) A (4,-7)
c) A (-6,9)
d) A (-7,-5)
e) A (7,-4)
f) A (9,-7)

Instrucción 3: En equipo de 4 integrantes lleven a cabo la demostración de las siguientes identidades.

a) sen x csc x=1
b) sen x sec x=tan x
c) $\frac{cos\ A}{cot\ A} = sen\ A$
d) $\frac{tan\ A}{sen\ A} = sec\ A$
e) $\frac{tan\ x}{sen\ x} = \frac{1}{sen\ x}$
f) $tan\ A\ cos\ A\ csc\ A = 1$
g) $\frac{sen\ B}{csc\ B} + \frac{cos\ B}{sec\ B} = 1$
h) $sec^2 A\ csc^2 A = sec^2 A + csc^2\ A$
i) $tan^2 A\ cot^2 A = sen^2 A + cos^2 A$

Evaluamos

Instrucción 1: De forma individual desarrolla el siguiente ejercicio graficando en hojas milimétricas.

1)Transforma las coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

A $(\mathbf{6}, \mathbf{150^0})$

Instrucción 2: De forma individual desarrolla el siguiente ejercicio graficando en hojas milimétricas.

2)Transforma coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

A) (4,-6)

Instrucción 3: De forma individual resuelve las siguientes identidades trigonométricas.

a) $sen\ A\ sec\ A = tan\ A$
b) $cot\ x\ sec\ x = 1$
c) $tan\ x\ cot\ x\ =\ 1$
d) $(1 - sen^2 A)(1 + tan^2 A) = 1$
e) $cos\ A\ sec\ \ A = 1$
f) $cos\ B\ csc\ B = cot\ B$
g) $\frac{sec\ W}{csc\ W} = tan\ W$

Referencias

Sergieieva, K. (2023, abril 26). Tipos De Satélites: Diferencias En Sus Funciones Y Utilidad. *EOS Data Analytics*. https://eos.com/es/blog/tipos-de-satelites/

Historia del. (2018, marzo 30). Plano cartesiano.

Marin, E. (s/f). *Plano cartesiano – LIBRO-PEDIA – Matemática*. Elbibliote.com. Recuperado el 28 de mayo de 2025, de https://elbibliote.com/libro-pedia/manual_matematica/?tag=plano-cartesiano

Fernández, J. L. (s/f). *Trayectoria y Ecuación de Posición*. Fisicalab.com. Recuperado el 28 de mayo de 2025, de https://www.fisicalab.com/apartado/ecuacion-trayectoria

Academia Internet [@AcademiaInternet]. (s/f). *Cinemática, velocidad, desplazamiento, distancia, gráficas*. Youtube. Recuperado el 28 de mayo de 2025, de https://www.youtube.com/watch?v=tpU7Z2r1YDk&feature=youtu.be

Cinemática. (s/f). Educaplus.org. Recuperado el 28 de mayo de 2025, de http://www.educaplus.org/movi/2_4distancia.html

González, J. A. S. (s/f). *lugar geométrico*. Proyectodescartes.org. Recuperado el 28 de mayo de 2025, de https://proyectodescartes.org/descartescms/blog/itemlist/tag/lugar%20geom%C3%A9trico

Arenas, P. F. [@farenas]. (s/f). *Lugares geométricos: ejemplos*. Youtube. Recuperado el 28 de mayo de 2025, de https://www.youtube.com/watch?v=TOKD4jxiyyU

Pendiente de una recta. (s/f). Unam.Mx. Recuperado el 28 de mayo de 2025, de http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/matematicas/paginacolmate/applets/matematicas_V/Applets_Geogebra/pendienterecta.html

No title. (s/f). Unesco.org. Recuperado el 28 de mayo de 2025, de https://whc.unesco.org/es/list/166

Perfil, V. T. mi. (s/f). *Geometría Analítica*. Blogspot.com. Recuperado el 28 de mayo de 2025, de https://geometriaanaliticalehmann.blogspot.com/2016/04/capitulo-ii-grafica-de-una-ecuacion-y.html

Artículos destacados - Elbibliote.com. (s/f). Elbibliote.com. Recuperado el 28 de mayo de 2025, de https://elbibliote.com/resources/Temas/html/2004.php

/u/profedomingohely. (2020, febrero 9). *Ecuación general de la recta: Ax + By + C = 0*. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/ghpw52pz

Geometría analítica para ciencias e ingenierías / Silvia Raquel Raichman; Eduardo Totter. 1a Ed ilustrada. - Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo, 2016.

Engler, Adriana Geometría / Adriana Engler; YR. - 2a Edición. - Santa Fe: Ediciones UNL, 2019

Geometría analítica / Benjamín Garza; 1a Edición. - México: Pearson 2014.

Admin. (2020, 27 abril). Curvas cónicas. Conceptos y tipos. Teorema de Dandelin. Directrices, excentricidad. Dibujo Técnico. https://dibujotecni.com/geometria-plana/curvas-conicas/

Acosta Sánchez, R. (2003). Matemáticas II: Geometría y trigonometría (2.a ed.).

Rubio, A., & De La Llave, Á. (2016, 14 abril). Matemáticas Gourmet. «Las esferas de Dandelin». https://aprender-ensenyar-matematicas.blogspot.com/2016/04/matematicas-gourmet-las-esferas-de.html

Olvera, B. G., & De Educación Pública Dirección General de Educación Tecnológica Industrial, M. S. (1997). Matemáticas III: geometría analítica